

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN



PROYECTO FIN DE CARRERA

ANÁLISIS DE VOLATILIDAD EN PRODUCTOS FINANCIEROS

AUTOR: Mario de Biase Jiménez

DIRECTOR: Miguel Lázaro Gredilla

TUTOR: Marcelino Lázaro

LEGANÉS, 2016

TÍTULO: *ANÁLISIS DE VOLATILIDAD EN PRODUCTOS FINANCIEROS*
AUTOR: *MARIO DE BLASE JIMÉNEZ*

DIRECTOR: *MIGUEL LÁZARO GREDILLA*
TUTOR: *MARCELINO LÁZARO*

La defensa del presente Proyecto Fin de Carrera se realizó el día 7 de Julio de 2016; siendo calificada por el siguiente tribunal:

PRESIDENTE: *CARLOS BOUSOÑO CALZÓN*

SECRETARIA: *LORENA ÁLVAREZ PÉREZ*

VOCAL: *JESÚS ARIAS FISTEUS*

Habiendo obtenido la siguiente calificación:

Presidente

Secretario

Vocal

AGRADECIMIENTOS

Este Proyecto Fin de Carrera supone para mí la finalización de una etapa de duro trabajo y esfuerzo. En este momento echo la vista atrás, y me doy cuenta de todos los retos a los que me he enfrentado, y de las cosas que han cambiado en mi vida desde que empecé la carrera con tanta ilusión. Quiero aprovechar estas líneas para dar las gracias a todas las personas que me han ayudado, quizás algunas no se dan cuenta de lo importantes que son para mí.

En primer lugar, debo agradecer a mi familia todo lo que ha hecho por mí. Especialmente, a mis padres y a mi hermano. Muchas gracias por apoyarme en los malos momentos y por vuestra confianza ciega en mí. Gracias por enseñarme a ser perseverante y a no rendirme, sin vosotros no sería quien soy. También me gustaría dar especialmente las gracias a mis abuelas Ana y Aurelia, me siento afortunado por haber convivido con ellas tantos años y sentir su cariño.

Gracias a mis amigos de siempre de Oropesa por todos los grandes momentos vividos y a mis amigos de Madrid por las noches interminables de baile. En especial a Antonio y a Alfredo, junto con mi padre me han enseñado a entender el mundo desde una perspectiva crítica y ecléctica. Sin ellos, quizás mi interés por la economía nunca se hubiera despertado y este proyecto no sería el que es.

Tengo mucha suerte de haber conocido a grandes compañeros en Avantgarde: Jorge, Adrián, Andrea, Alfredo, Claudia, Patricia, José Antonio... me habéis animado mucho y habéis hecho más fácil poder compatibilizar el trabajo y la finalización de este proyecto.

A Elena, gracias por estar siempre a mi lado y animarme. Me siento muy afortunado por haber encontrado una persona que tiene una confianza en mí que no tiene límites.

Por supuesto, gracias a mis tutores Miguel y Marcelino, por confiar en mí para este proyecto, por su paciencia y por haberme guiado durante este tiempo.

Por último, he dejado para el final a todos mis compañeros de la universidad. Ellos son los que realmente entienden lo que supone terminar un proyecto fin de carrera, y todos los momentos de desasosiego e impotencia vividos. Gracias a: Carlos, Aurora, Alberto, Raquel, Javi, Raúl y a todas aquellas personas con los que he compartido nervios y alegrías durante exámenes y prácticas.

A mis padres

Resumen

La predicción de volatilidad es fundamental en finanzas. Se utiliza en la valoración de productos derivados, selección óptima de carteras, gestión de riesgo, estrategias de inversión... Por lo que es muy importante calcular con precisión la volatilidad para estas aplicaciones. Sin embargo, la volatilidad no es observable y la evaluación de los modelos no es sencilla.

En este Proyecto Fin de Carrera se realizará un estudio de la volatilidad de los futuros del IBEX 35 y el EURO STOXX 50, la cotización de BBVA y de un conjunto de valores del NASDAQ y el NYSE.

Primero, se compararán algunos de los modelos más representativos de la familia GARCH con el objetivo de identificar los modelos con buena capacidad predictiva, y observar su comportamiento cuando se modifica: la longitud de la ventana de estimación, la distribución de las innovaciones y la frecuencia de reestimación de los parámetros.

Después, se analizarán los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH que están basados en algoritmos adaptativos. Estos modelos calculan los parámetros de forma *online*, evitando de este modo tener que definir un conjunto de entrenamiento y estimar los parámetros por máxima verosimilitud. Además de estudiar el rendimiento de estos dos modelos, se observará su capacidad predictiva cuando se utilizan series intradía de diferentes frecuencias.

Finalmente, se resumirán los resultados de los experimentos y las conclusiones obtenidas. Por otra parte, se presentarán algunas posibles extensiones, así como nuevas ideas para continuar este proyecto en un futuro.

Palabras clave: predicción de volatilidad, GARCH, algoritmos adaptativos, evaluación de la volatilidad.

Abstract

Volatility forecasting is essential for many problems in finance: derivative pricing, optimal portfolio selection, risk management, trading strategies... Consequently, accurate forecasts of future volatility are critical for these financial applications. However, volatility cannot be observed directly and evaluation of volatility models is not straightforward.

This Final Project will provide a volatility study of IBEX 35 and DJ EURO STOXX 50 futures, BBVA stock, and a dataset of stocks that are traded on NYSE and NASDAQ.

Firstly, it will compare some of the most representative models of the GARCH family. The objective is to identify successful predictive models and to observe the predictive ability's behaviour when the estimation window length, innovation distribution and frequency of parameter re-estimation are changed.

Secondly, it will examine LMS-GARCH and RLS-GARCH models that are based on adaptive algorithms. These models propose an online method to update the parameters, avoiding the need to select a training set and estimate the parameters using a maximum likelihood approach. In addition to studying the performance of these two methods, an analysis of their predictive ability will also be provided when different high-frequency series are used.

Finally, it will summarize the results of the experiments and conclusions. Moreover, some possible extensions of the current work will be presented, as well as new ideas for future work.

Keywords: Volatility Forecast, GARCH, Adaptive Algorithms, Volatility Evaluation.

Contenido

Capítulo 1	Introducción	17
1.1	Motivación	17
1.2	Objetivos	21
1.3	Limitaciones.....	22
1.4	Estructura de la memoria.....	23
Capítulo 2	Series temporales y volatilidad.....	25
2.1	Conceptos y modelos de series temporales	25
2.1.1	Proceso estocástico.....	25
2.1.2	Proceso estacionario.....	27
2.1.3	Procesos AR.....	29
2.1.4	Procesos MA.....	29
2.1.5	Procesos ARMA.....	30
2.2	Activo financiero.....	30
2.2.1	Retorno de un activo.....	31
2.2.2	Riesgo.....	34
2.2.3	Liquidez	34
2.3	Volatilidad	34
2.3.1	Características de la volatilidad	35
2.4	Variable <i>proxy</i>	38
Capítulo 3	Metodología de predicción.....	41
3.1	Procedimiento de predicción de la volatilidad	41
3.2	Evaluación de las predicciones	42
3.2.1	Funciones de error: MSE y QLIKE	45
3.2.2	Test de significancia estadística.....	46

Capítulo 4	Modelos de volatilidad	49
4.1	Familia de modelos ARCH	49
4.1.1	Modelo ARCH	50
4.1.2	Modelo GARCH.....	51
4.1.3	Modelo TGARCH.....	51
4.1.4	Modelo EGARCH.....	52
4.1.5	Modelo AGARCH.....	53
4.1.6	Modelo APARCH	54
4.2	Modelos basados en algoritmos adaptativos online: LMS-GARCH y RLS-GARCH.....	55
4.2.1	Algoritmos adaptativos de los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH	57
4.2.2	Inestabilidad de los modelos LSM-GARCH y RLS-GARCH.....	61
4.3	Otros modelos.....	62
4.3.1	Volatilidad histórica a n-días	62
4.3.2	RiskMetrics	62
Capítulo 5	Resultados y análisis	63
5.1	Conjunto de datos.....	63
5.1.1	Conjunto de series europeas	64
5.1.2	Conjunto de series americanas.....	64
5.2	Experimentos con modelos GARCH	65
5.2.1	Comparación de estrategias de estimación	65
5.2.2	Comparación de modelos.....	70
5.3	Experimentos con modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH	72
5.3.1	Análisis de las series europeas.....	73
5.3.2	Análisis de las series americanas	77
5.3.3	Comportamiento de los modelos LMS-GARCH-RV y RLS-GARCH-RV con series intradía a diferentes frecuencias	80

Capítulo 6	Conclusiones.....	83
6.1	Conclusiones.....	83
6.2	Líneas futuras.....	85
Apéndice A	Errores de predicción de los modelos GARCH.....	87
Apéndice B	Errores de predicción de los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH.....	101
Apéndice C	Estrategias de estimación GARCH para AMZN, BAC, GOOG e IBM	111
Apéndice D	Presupuesto.....	117
Lista de figuras	119
Lista de tablas	121

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo comienza con una revisión del papel de la volatilidad en las finanzas y por qué es una variable tan importante en la actualidad. También se presentan los modelos clásicos de volatilidad y la notación que se utiliza. El capítulo concluye introduciendo los problemas que presenta la predicción de volatilidad y de qué forma se pueden abordar.

1.1 Motivación

En los últimos 30 años la volatilidad se ha convertido en un concepto clave en las finanzas, utilizándose a diario en: valoración de opciones, cobertura de riesgo, gestión de carteras, planificación de la política monetaria... La volatilidad se puede definir como la desviación estándar de los rendimientos de un activo, es decir, es una medida de la frecuencia e intensidad de los cambios del precio de un activo independientemente de la tendencia del mercado. Ha pasado de ser un parámetro constante, como en los modelos de selección de carteras (Markowitz, 1952) y valoración de opciones (Black & Scholes, 1973), a un proceso que varía en función del tiempo en el modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) en (Engle, 1982).

Los agentes del mercado (analistas, inversores, brokers...) están interesados en estimar o predecir la volatilidad para conocer mejor el mercado o gestionar adecuadamente una cartera; es decir, se utiliza como una medida de riesgo: a mayor volatilidad mayor riesgo, ya que existe mayor incertidumbre sobre el precio de un activo. Por esta razón la predicción de volatilidad suscita tanto interés y ha adquirido tanta importancia, generando numerosos estudios todos los años.

Los modelos actuales han sido criticados por no poder predecir las crisis económicas, aunque paradójicamente los *crashes*, como la crisis financiera de 2008, son los periodos más interesantes para el estudio de la volatilidad. En este periodo el índice de volatilidad más impor-

tante, el VIX del mercado de opciones de Chicago, llegó al 89.53%. Sin embargo, estos episodios turbulentos permiten probar los modelos y obtener resultados muy interesantes. (Brownless, Engle, & Kelly, 2009) estudiaron el comportamiento de algunos modelos de volatilidad durante la crisis de 2008, observando que cuando se utilizan horizontes de predicción de un día los modelos funcionan adecuadamente, ya que los errores en ese periodo no fueron mayores que durante los 80 años anteriores. En cambio, durante la crisis la capacidad predictiva de los modelos se deterioró para horizontes superiores a un día.

La utilización de estos modelos de volatilidad está más que justificada, ya que son utilizados satisfactoriamente a diario. La existencia de fenómenos cada vez más frecuentes que se creían altamente improbables, así como el aumento de la complejidad del sistema financiero, no debería desincentivar el estudio en este campo y en otros relacionados con las finanzas, sino todo lo contrario. En este sentido, hay que destacar el importante esfuerzo divulgativo del profesor Robert Shiller¹ en recuperar la confianza de las personas en el sistema financiero, defendiendo una idea que puede no convencer a muchos: “Dejemos de condenar el sistema financiero y, por el bien común, recuperémoslo”. Shiller afirma que la innovación financiera puede ayudar a la gente a salir de la pobreza, al igual que puede controlar la riqueza extrema.

A continuación, se realiza una introducción de los modelos clásicos de volatilidad que será completada más adelante cuando se traten en detalle.

Las series financieras utilizan como variable dependiente los rendimientos de un determinado activo denotados como r_t , y que se expresan como:

$$r_t = \epsilon_t \sqrt{h_t}$$

donde h_t es la varianza condicional y ϵ_t es un proceso independiente e idénticamente distribuido (i.i.d.) de media cero y varianza uno. El término ϵ_t representa las innovaciones, es decir, la

¹ Robert Shiller fue premio Nobel de Economía en 2013 por sus estudios sobre la volatilidad y la formación de los precios en los mercados financieros. Es famoso por advertir de las dos últimas burbujas (*puntocom* e inmobiliaria) y promover innovaciones en el sistema financiero para evitar la desigualdad social y económica.

1.1 MOTIVACIÓN

información nueva respecto al periodo anterior. Algunos autores también se refieren a ϵ_t como el error o el residuo.

La mayoría de los modelos de series temporales, como el ARMA (Autoregressive Moving Average) o ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average), suponen que el proceso estocástico subyacente es homocedástico, es decir, que la varianza condicional del proceso h_t es constante a lo largo del tiempo. Sin embargo, en 1982 el estudio de Engle introdujo el modelo ARCH para estudiar la varianza de la inflación del Reino Unido (Engle, 1982). Observó que los errores de predicción obtenidos se encontraban agrupados en diferentes intervalos, lo que implica la presencia de heterocedasticidad, es decir, que la varianza condicional es dependiente del tiempo. El objetivo principal de la introducción de este modelo fue tratar con la heterocedasticidad de las series financieras, así como reflejar el agrupamiento de la volatilidad.

Antes de la aparición del modelo ARCH se utilizaba la volatilidad histórica (HIS), que no es más que la desviación estándar calculada en una cierta ventana temporal, por ejemplo, los últimos 30, 60 ó 90 días. En cambio, el modelo ARCH se basa en una serie de parámetros calculados por máxima verosimilitud. Estos parámetros ponderan los rendimientos anteriores de la serie dando más relevancia a los últimos días. Así un modelo ARCH(30) está compuesto por 31 parámetros convenientemente calculados, y un modelo HIS(30) se puede interpretar como un modelo ARCH con 30 parámetros de valor constante.

Sin embargo, ARCH necesita muchos parámetros para poder caracterizar adecuadamente la volatilidad de las series financieras, lo que hace que el proceso de estimación sea más complicado. Por ese motivo, (Bollerslev, 1986) enunció el modelo GARCH como una generalización del ARCH, y propuso que la volatilidad dependiera tanto de los rendimientos anteriores como de los propios instantes pasados de la volatilidad. De esta forma obtuvo un modelo más sencillo que necesita menos parámetros.

A raíz de la aparición del modelo GARCH se ha creado una familia entera de modelos con la intención de capturar las propiedades de la volatilidad que los modelos de Engle y Bollerslev no consideran. Aparte de GARCH en este proyecto solo se tienen en cuenta los modelos TGARCH (Threshold GARCH) (Rabemananjara & Zakoian, 1993); (Glosten, Jagannathan, & Runkle, 1993), EGARCH (Exponential GARCH) (Nelson, 1991), AGARCH (Asymmetric GARCH) (Engle & Ng, 1993) y APARCH (Asymmetric Power ARCH) (Ding, Granger, & Engle, 1993)

para capturar propiedades como la asimetría, el apalancamiento de la volatilidad, los efectos a largo plazo de la volatilidad,... Existen cientos de variantes y, aunque estos modelos pueden superar al modelo GARCH, existen estudios que demuestren que el modelo GARCH tiene un buen rendimiento respecto a modelos más complejos como (Hansen & Lunde, 2005b)¹. De esta forma, el modelo GARCH se ha convertido en una referencia para comparar otros modelos o nuevas propuestas. Concretamente, el modelo más utilizado es el GARCH(1,1).

La mayor parte de complejidad en la predicción de la volatilidad se debe a que no es una variable directamente observable, lo que dificulta enormemente el análisis de los resultados, ya que no existe un único criterio para la comparación de los mismos.

Para evaluar las predicciones se emplean estimadores insesgados de la verdadera volatilidad σ_t^2 a modo de variables sustitutas o *proxies*. En la literatura econométrica los *proxies* más utilizados son los rendimientos al cuadrado del activo r_t^2 y la volatilidad realizada rv . Ambos son insesgados, pero r_t^2 es un estimador más ruidoso de σ_t^2 porque la rv se obtiene con series intradía que tienen más de una muestra por día. Se pueden utilizar diferentes frecuencias para calcular la volatilidad realizada, aunque si la frecuencia es muy alta aparecen efectos de microestructura de mercado haciendo que el *proxy* deje de ser insesgado.

Ahora bien, los resultados obtenidos al comparar las predicciones de un modelo con un *proxy* no son los mismos que si se empleara la volatilidad latente. Si se realizan varias comparaciones entre modelos utilizando diferentes *proxies* se pueden observar variaciones en los resultados, haciendo que la selección del mejor modelo no sea la correcta. Además, si se establece una clasificación de los modelos atendiendo a su capacidad de predicción esta clasificación puede cambiar debido al ruido del *proxy* elegido. Este problema ha sido ampliamente estudiado, destacando los trabajos de (Andersen & Bollerslev, 1998), (Hansen & Lunde, 2006) y (Patton, 2009). Este último se centra en las distorsiones de las funciones de error más comunes cuando se utilizan para evaluar las predicciones obtenidas, y determina una familia de funciones de error a las que denomina *funciones robustas*. Estas funciones de error aseguran, bajo ciertas condiciones,

¹ (Hansen & Lunde, 2005b) comparan el modelo GARCH con más de 330 modelos de la familia GARCH sin encontrar un modelo que lo superare significativamente.

1.2 OBJETIVOS

que las clasificaciones de las predicciones realizadas con varios modelos se mantengan, y no se vean alteradas por el ruido de los *proxies* de la volatilidad.

Patton descubrió un conjunto infinito de *funciones robustas*, pero solo utilizaremos las dos que recomienda: el error cuadrático medio (MSE) y el error cuasi-verosímil (QLIKE) porque son las únicas que dependen del error de predicción ($\hat{\sigma}_t^2 - h_t$) y del error de predicción estandarizado ($\hat{\sigma}_t^2/h_t$) respectivamente. En estas expresiones $\hat{\sigma}_t^2$ es un *proxy* y h_t son las predicciones obtenidas mediante un determinado modelo.

Por tanto, la evaluación de las predicciones de la volatilidad presenta principalmente dos problemas, por un lado los *proxies* introducen ruido y conducen a errores en la selección de la mejor predicción porque son estimadores de la verdadera volatilidad σ_t^2 . Por otro lado, las funciones de error también puede introducir distorsiones si no se eligen convenientemente, ya que no todas las funciones de error minimizan el error en σ_t^2 , sino que lo hacen para otro valor.

1.2 Objetivos

En este proyecto se plantea la realización de un estudio de la volatilidad de los futuros del IBEX 35 PLUS, el DJ EURO STOXX 50, la cotización del BBVA y de un conjunto de valores del NASDAQ y el NSYE. Se propone la utilización de un conjunto de modelos suficientemente representativo de toda la familia GARCH para compararlos con los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH.

Se pueden diferenciar dos partes en este proyecto, en la primera se emplean los modelos clásicos, y se identifican los modelos con mejor capacidad de predicción. En la segunda parte se estudia el rendimiento de los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH que calculan los parámetros en tiempo real (*online*). Los objetivos que nos hemos marcado, son los siguientes:

- Estudiar el comportamiento de diferentes estrategias para la estimación de los parámetros del modelo GARCH(1,1).
- Comparar los modelos GARCH(1,1), TGARCH(1,1), EGARCH(1,1), AGARCH(1,1), APARCH(1,1), HIS y RiskMetrics.
- Comparar el modelo GARCH(1,1) con los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH basados en algoritmos adaptativos.

- Observar el comportamiento de la capacidad predictiva de los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH cuando se utilizan series intradía de diferentes frecuencias.
- Emplear cuatro criterios para comparar los resultados: las funciones de error QLIKE y MSE, junto con los proxies r^2 y rv .
- Emplear test de Diebold Mariano West (DMW) para estudiar la significancia de los errores obtenidos.

1.3 Limitaciones

La realización de un estudio sobre la volatilidad de series financieras supone trabajar con diferentes modelos GARCH que tienen asociados unos parámetros cuyo cálculo no es trivial. Para ello se han utilizado el Financial Toolbox™ de MATLAB® y el Oxford MFE Toolbox de Kevin Sheppard que permiten realizar transformaciones de los datos, calcular los modelos y sus parámetros, así como la realización de test de significancia estadística.

La complejidad de este trabajo no solo ha residido en los modelos, también ha requerido buena parte del tiempo la adquisición y el tratamiento de las series. Algunas de estas han sido proporcionadas por mis tutores de proyecto y otras han tenido que ser obtenidas de Yahoo! Finance. Si únicamente se hubiera necesitado la versión diaria de las series este proceso hubiera sido sencillo, ya que existen muchas bases de datos gratuitas con suficiente información en Internet, pero para calcular la volatilidad realizada son necesarias series intradía. Esto implica tener que comprarlas si se desea una serie en un periodo particular u obtenerlas en tiempo real si el periodo de tiempo no es un problema.

Dada la imposibilidad de comprar las series por su alto coste, se ha optado por la adquisición de parte de estas y, de este modo, completar el conjunto de series proporcionadas. Durante varios meses se han estado realizando peticiones diarias a los servidores de Yahoo! Finance porque la información en tiempo real solo está disponible durante unos días, tras los cuales únicamente se pueden obtener las series diarias. Con el fin de automatizar la obtención de las series, se ha implementado un sistema que consta de un servidor web Apache y varios *scripts* en PHP. Además, se ha necesitado manipular las series para cambiar la frecuencia y adaptar el formato de las mismas, ya que las series provienen de distintas fuentes y solo se dispone de la versión en

1.4 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA

tiempo real de la mayoría de las series intradía. Este proceso también incluye la lectura de las series y comprobación de que estas sean coherentes para que puedan ser utilizadas en MATLAB®.

Por último, hay que destacar que para facilitar la lectura y análisis de los resultados ha sido necesario implementar varias funciones y *scripts* en MATLAB® para exportar los resultados de los experimentos a hojas de cálculo en Microsoft Excel. Esta tarea se ha podido realizar fácilmente gracias a varias funciones de MATLAB® que permiten acceder al modelo de objetos de Microsoft® Excel® a través de un controlador ActiveX®.

1.4 Estructura de la memoria

Este documento está organizado de modo que en los primeros capítulos se detallan los conceptos necesarios para entender los experimentos de este proyecto. El Capítulo 2 realiza una breve introducción sobre series temporales y procesos estocásticos, también se define el rendimiento de un activo financiero, así como el concepto de volatilidad y sus características. En el Capítulo 3 se describe la metodología de predicción: se explica el procedimiento para calcular los parámetros de los modelos GARCH, cómo se obtienen las predicciones de la volatilidad de una serie y la evaluación de los resultados mediante las funciones de error y los test de DMW. El Capítulo 4 detalla los modelos GARCH, HIS, RiskMetrics, y los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH que están basados en algoritmos adaptativos.

El Capítulo 5 es el más importante porque describe el conjunto de series utilizado, se presentan los experimentos realizados y se evalúan los resultados obtenidos. En el apartado 5.1 se indican las series empleadas, la duración y cómo se han obtenido. El apartado 5.2 se centra en el análisis de los modelos GARCH, analizando diferentes estrategias de estimación de los parámetros para el modelo GARCH(1,1), y comparando los modelos GARCH, TGARCH, EGARCH, AGARCH, APARCH, HIS y RiskMetrics. Por otro lado, en el apartado 5.3 se compara el modelo GARCH con LMS-GARCH y RLS-GARCH. Además, se observa el comportamiento de estos dos modelos cuando se emplean series intradía de diferentes frecuencias.

Finalmente, en el Capítulo 6 se resumen los resultados de los experimentos y las conclusiones obtenidas. También se proporcionan algunas ideas para continuar este proyecto en un futuro. El Apéndice adjunta todas las tablas de los resultados que se han obtenido en los experimentos.

Capítulo 2

Series temporales y volatilidad

En este capítulo se realiza un repaso de los conceptos de procesos estocásticos y los modelos utilizados en análisis de series temporales. Estos modelos son importantes para entender los que se emplearán para predecir la volatilidad. También se revisará el concepto de volatilidad y sus principales propiedades, así como algunos conceptos financieros clave.

2.1 Conceptos y modelos de series temporales

Una serie temporal es una secuencia ordenada de observaciones $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, que están separadas normalmente a intervalos iguales de tiempo. Aparecen en multitud de campos diferentes. Por ejemplo, en la agricultura podemos observar la producción o los precios de las materias primas. En meteorología las temperaturas, precipitaciones, concentraciones de gases... En economía tenemos series de precios de los índices bursátiles, tasas de interés, ventas de una compañía... Si la variable medida varía en el tiempo de forma continua, se puede muestrear, es decir, tomar valores en intervalos de tiempo de igual magnitud. Alternativamente, se pueden acumular los valores en intervalos de tiempo equiespaciados.

2.1.1 Proceso estocástico

Un proceso estocástico es una secuencia de variables aleatorias $\{X_t(w); w \in \Omega, t \in T, \}$, denotado como $(X_t)_{t \in T}$, donde Ω es el conjunto de todos los sucesos y T es el espacio de tiempos. Los procesos estocásticos pueden ser continuos si T es un conjunto continuo, o discretos si T es un conjunto numerable ($T \in \mathbb{N}$). Como el objetivo en este proyecto es emplear series financieras, únicamente nos interesan los procesos estocásticos discretos, a los que denominaremos simplemente procesos estocásticos. El lector interesado en la extensión del caso continuo puede consultar (Peña, 2005).

Un concepto que nos interesa, es el relativo a la distinción entre proceso y realización. La serie temporal $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ se caracteriza por ser una realización del proceso estocástico $\{X_1(w), X_2(w), \dots, X_n(w)\}$. Cada observación x_t de la serie temporal se corresponde con un determinado valor de una variable aleatoria $X_t(w)$ o, simplemente, X_t . Por tanto, para poder estimar las características del proceso a partir de la serie temporal es necesario que estos sean estables a lo largo del tiempo, es decir, estacionarios. Antes de estudiar este tipo de procesos vamos a definir algunos conceptos asociados a procesos estocásticos que necesitaremos:

Definición 2.1

La función de distribución conjunta de las variables aleatorias $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n} = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \quad (1)$$

donde $x_n \in \mathbb{R}$ para cualquier $n \in T = \{1, 2, \dots, n\}$.

Definición 2.2

La media de un proceso estocástico $(X_t)_{t \in T}$ es una función dependiente de t que proporciona la media para cada una de las variables aleatorias X_t que forman el proceso:

$$\mu_t = E[X_t], \quad t \in T \quad (2)$$

Definición 2.3

La varianza de un proceso estocástico $(X_t)_{t \in T}$ es una función dependiente de t que proporciona la varianza para cada una de las variables aleatorias X_t que componen el proceso:

$$V[X_t] = E[(X_t - \mu_t)^2], \quad t \in T \quad (3)$$

2.1 CONCEPTOS Y MODELOS DE SERIES TEMPORALES

Definición 2.4

La función de autocovarianza de un proceso estocástico $(X_t)_{t \in T}$ es una función que proporciona la covarianza entre variables aleatorias en un par de instantes $t, s \in T$ cualesquiera.

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)] \quad (4)$$

Definición 2.5

Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in T}$ es normal o gaussiano si para cualquier tiempo t la variable aleatoria X_t tiene distribución normal.

Definición 2.6

Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in T}$ es ruido blanco si tiene media cero, $\mathbb{E}[X_t] = 0$, y su función de autocovarianza es:

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} \mathbb{V}[X_t], & \text{si } h = 0 \\ 0, & \text{si } h \neq 0 \end{cases} \quad (5)$$

2.1.2 Proceso estacionario

En series financieras el concepto estacionariedad es importante para poder caracterizar el proceso estocástico, ya que es necesario que las series sean estables a lo largo del tiempo. A continuación, se dan definiciones más formales.

Definición 2.7

Una serie temporal $\{x_t\}$ se dice que es estacionaria en sentido estricto si la distribución conjunta de orden n , es igual a la distribución conjunta de orden $n + h$, para cualquier conjunto de instantes de tiempo $t = 1, \dots, n$ y cualquier incremento h . Es decir, la distribución conjunta de la serie es invariante a desplazamientos temporales.

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n} = F_{X_{1+h}, X_{2+h}, \dots, X_{n+h}} \quad (6)$$

En la práctica esta condición es difícil que se cumpla, por ese motivo en la mayoría de los casos se utiliza la definición de estacionariedad débil o en sentido amplio.

Definición 2.8

Una serie temporal $\{x_t\}$ se dice que es estacionaria en sentido amplio si cumple las siguientes condiciones:

$$\mathbb{E}[x_t] = \mu \quad (7)$$

$$\mathbb{V}[x_t] = \mathbb{E}[(x_t - \mu)] = \sigma^2 \quad (8)$$

$$\text{Cov}(x_t, x_{t+m}) = \gamma_m \quad (9)$$

Las Ecuaciones (7) y (8) indican que la media y la varianza de x_t son constantes y no dependen del tiempo. La covarianza sólo depende de la diferencia entre tiempos como muestra la Ecuación (9).

Un proceso estacionario en sentido estricto es también estacionario en sentido amplio pero no al revés. Hay que destacar que si el proceso es normal, entonces la implicación contraria también es cierta, porque los procesos normales quedan definidos totalmente por su media, varianza y covarianzas.

En series financieras se trabaja con procesos estacionarios en sentido amplio o con transformaciones de estos, ya que la estacionariedad es una condición necesaria en los procesos que se usan para modelar las series. Por ejemplo, es habitual utilizar series de precios para obtener las series de retornos.

2.1 CONCEPTOS Y MODELOS DE SERIES TEMPORALES

2.1.3 Procesos AR

Los procesos autorregresivos dependen de los valores anteriores de la serie. Estos procesos se han utilizado, por ejemplo, para describir el movimiento de un péndulo o el número de las manchas solares (Yule, 1927).

Definición 2.9

Un modelo autorregresivo de orden de p , $AR(p)$, se define del siguiente modo¹:

$$r_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i r_{t-i} + \varepsilon_t \quad (10)$$

donde a_i el conjunto finito de parámetros del modelo y la serie ε_t ruido blanco con media cero y varianza σ_ε^2 . Este término se conoce como la serie de error o la serie de innovaciones.

2.1.4 Procesos MA

Los modelos de medias móviles explican el valor de una variable en el instante t como una sucesión de términos ponderados que dependen de instantes anteriores, y de un proceso de ruido blanco ε_t .

Definición 2.10

Un modelo de medias móviles de orden q , $MA(q)$, se puede enunciar como:

$$r_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad (11)$$

En esta expresión los parámetros θ_i es el conjunto de parámetros y ε_t es un proceso de ruido blanco con media cero y varianza σ_ε^2 . Algunos autores incluyen un término independiente en el

¹ Para definir las ecuaciones de los modelos se va seguir la nomenclatura utilizada en la literatura econométrica. Para representar las series se emplea r_t porque se identifica con los retornos de los índices o valores.

modelo, siendo este término la media del proceso. En este caso como no se ha incluido la media es cero.

Estos procesos surgieron a raíz de los estudios de (Yule, 1926) y (Slutsky, 1927) , al intentar explicar el comportamiento periódico que aparece en ciertas series temporales. Este fenómeno se conoce como efecto Slutsky-Yule y puede explicar el comportamiento de los ciclos económicos.

2.1.5 Procesos ARMA

Definición 2.11

Un modelo ARMA(p, q) es una combinación de los dos modelos anteriores, uno AR de p términos y otro MA de q términos. Su expresión analítica es, por tanto:

$$r_t = \sum_{i=1}^p a_i r_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (12)$$

El modelo ARMA fue introducido por Peter Whittle (Whittle, 1951) para poder describir adecuadamente ciertos procesos que los modelos AR y MA solo consiguen describir con un orden elevado. Pero este modelo no se popularizó hasta 1971 por la publicación en el libro de George E. P. Box y Gwilym Jenkins (Box & Jenkins, 1970).

2.2 Activo financiero

Un activo financiero es un título emitido por un prestatario que se endeuda y por tanto, genera un déficit. El título es aceptado por un ahorrador o prestamista y le otorga el derecho sobre el prestatario para recibir lo prestado en unas condiciones pactadas de antemano.

Los activos financieros se consideran una forma de mantener la riqueza porque consiguen trasladar el ahorro hacia la inversión. Las sociedades venden los activos financieros (bonos, acciones, fondos, divisas...) a los inversores para captar su ahorro y así lograr financiar su actividad. Por ejemplo, un bono es una obligación financiera contraída por la entidad emisora del activo (el estado, un organismo, una compañía...) con un inversor, y representa un préstamo que

2.2 ACTIVO FINANCIERO

deberá ser devuelto por el emisor con un determinado interés. Una acción es una de las pequeñas partes en las que se divide el capital social de cierta sociedad o empresa y otorga al inversor ciertos derechos. Si fuese el caso, el inversor podría recibir dividendos por cada acción, pero a diferencia de los bonos, el inversor no sabe la cantidad que va a recibir porque los dividendos dependen de los beneficios de la compañía.

Existen distintos tipos de activos con diferentes rentabilidades, pero cuanto mayor es la rentabilidad mayor es el riesgo. Definiremos las principales características de un activo financiero para entender mejor esta relación. Estas características son la rentabilidad o retorno, el riesgo y la liquidez.

2.2.1 Retorno de un activo

Los términos rendimiento y retorno de un activo se utilizan para referirse a la tasa de interés generada por el activo en un determinado periodo tiempo¹. En las siguientes definiciones se supone que el activo no paga dividendos, P_t será el precio del activo y R_t el interés o retorno en el instante de tiempo t .

Los retornos se pueden capitalizar de dos formas distintas, mediante un interés simple o un interés compuesto. A continuación se definen ambos conceptos.

Definición 2.12. Interés simple

El activo produce un rendimiento fijo R en cada periodo sobre una cantidad P_0 . Se define como:

$$P_t = P_0(1 + nR) \quad \forall t = 1, \dots, n \quad (13)$$

En la ecuación anterior se puede observar que la cantidad P_0 es la misma en todos los periodos porque no se reinvierten los rendimientos. Un ejemplo para este tipo de interés es un depósito a plazo fijo que se renueva aportando siempre la misma cantidad P_0 .

¹ Algunos autores se refieren a la tasa de interés como la cantidad remunerada respecto al valor nominal de un activo, y definen rendimiento o retorno dependiendo de la variación de las tasas de interés, el pago de dividendos, los cambios de calificación... En los estudios sobre volatilidad se usa el término *return* y no se consideran los pagos de dividendos u otras cantidades, por eso se usan los términos retorno o rendimiento indistintamente.

Definición 2.13. Interés compuesto

El rendimiento generado en un determinado periodo se suma al capital del periodo anterior y se invierte en el siguiente periodo, es decir, el rendimiento generado en un determinado periodo se reinvierte. El activo produce un interés R_t desde el periodo $t - 1$ hasta t .

$$P_t = P_{t-1}(1 + R_t) \quad (14)$$

En la siguiente ecuación se describe el retorno simple como:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (15)$$

Si desarrollamos a lo largo de n periodos de tiempo:

$$P_f = P_0(1 + R_{t_1})(1 + R_{t_2}) \cdots (1 + R_{t_n}) \quad (16)$$

Después de capitalizar cada una de las cantidades obtenidas al final de cada uno de los n periodos, se obtiene la cantidad final P_f .

Si se considera que se pagan intereses m veces dentro de un periodo, la cantidad final obtenida se escribe como:

$$P_f = P_0 \left(1 + \frac{R_t}{m}\right)^{nm} \xrightarrow{n=1} P_t = P_{t-1} \left(1 + \frac{R_t}{m}\right)^m \quad (17)$$

Si $m = 2$ se recibirán interés dos veces al año, si $m = 4$ se recibirán intereses trimestralmente y si $m = 365$ se recibirán diariamente. El objetivo es capitalizar de forma continua, por tanto, si $m \rightarrow \infty$ la Ecuación (17) se puede aproximar como:

$$P_t = P_{t-1} e^{R_t} \quad (n=1) \quad (18)$$

2.2 ACTIVO FINANCIERO

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = p_t - p_{t-1} \quad (19)$$

$$r_t = \ln(1 + R_t) \quad (20)$$

Si observamos las Ecuaciones (18)-(20), el logaritmo neperiano del rendimiento bruto lleva al rendimiento de capitalización continua o log-retorno r_t . Este resultado es importante porque será la forma que se seguirá para calcular las series de los rendimientos.

Se puede observar como varía el rendimiento según la forma de capitalizar los intereses. Cuando el número de periodos es pequeño, la forma que se usa para calcular los retornos de un activo es poco significativa. Sin embargo, conforme el número de periodos aumenta, la diferencia entre ambos métodos es considerablemente mayor. En la Figura 2.1 se puede ver el comportamiento del rendimiento obtenido a lo largo de 10 periodos. Para una cantidad inicial de 1000 unidades monetarias y un interés del 20%.

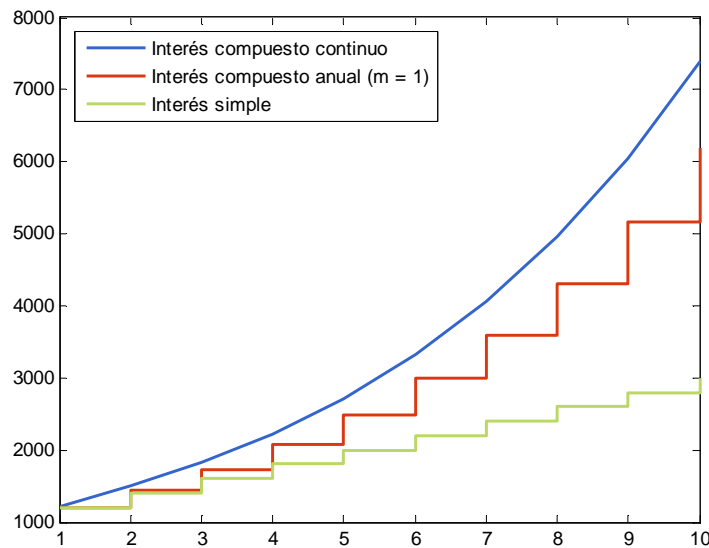


Figura 2.1. Diferentes formas de capitalización de los rendimientos de un activo.

2.2.2 Riesgo

El riesgo de un activo financiero está relacionado con la probabilidad de impago del emisor una vez llegado el vencimiento del activo, y se determina en función de la solvencia del emisor y de las garantías o avales que proporcione. De esta forma se pueden encontrar desde inversiones de poco riesgo como la deuda pública y los depósitos, a inversiones más arriesgadas como acciones, ETFs (fondos cotizados), productos derivados...

No obstante, el riesgo no depende únicamente del emisor y el tipo de activo financiero, también se consideran otros factores como: el sector, el país, la situación económica global... De hecho la globalización hace que aparezca un riesgo sistémico en todas las inversiones del mundo por las dependencias de todos los mercados financieros

2.2.3 Liquidez

La liquidez es la capacidad de conversión de un activo a dinero a corto plazo sin sufrir pérdida de valor. El grado de liquidez del activo depende de la facilidad y de la seguridad para ser convertido, es decir, además de una rápida transformación, también es indispensable la certeza de que el activo se conseguirá convertir finalmente a dinero sin depreciarse.

Por ejemplo, los billetes y monedas, los depósitos bancarios, la deuda pública son activos líquidos. En cambio, existen otros activos menos líquidos como los inmuebles, la maquinaria, los vehículos... que no se pueden vender a un precio determinado en el momento deseado.

2.3 Volatilidad

La volatilidad juega un papel muy importante para cualquier persona relacionada con los mercados financieros: grupos de grandes inversores, intermediarios, asesores, inversores individuales... Para cada uno de ellos la volatilidad puede tener matices diferentes. La volatilidad no significa lo mismo para un pequeño inversor que para las personas que trabajan con productos derivados, opciones, carteras de inversión u otros productos financieros de forma profesional. Para estos últimos la volatilidad es una herramienta indispensable. Normalmente maximizan la rentabilidad para una determinada volatilidad o minimizan la volatilidad para una rentabilidad fijada anteriormente.

2.3 VOLATILIDAD

La volatilidad puede ser obtenida de series históricas o ayudar a modelos para estimar la volatilidad futura. Figlewski en su artículo *Forecasting Volatility* se refiere a la volatilidad como un conjunto de conceptos relacionados y no únicamente como un parámetro, (Figlewski, 1997).

La volatilidad es una medida de la frecuencia e intensidad de los cambios del precio de un activo, o desde un punto de vista estadístico, la desviación estándar condicional de la serie de los rendimientos. Es importante destacar que la varianza incondicional (o marginal) de una serie estacionaria es constante, mientras que la varianza condicional depende del tiempo y es la que asociaremos con la volatilidad.

Definición 2.14

Sea una serie de retornos capitalizados de forma continua $r_t, t = 1, \dots, T$, según la Ecuación (19) y \mathcal{F}_{t-1} sea la información disponible hasta el instante $t - 1$. La desviación estándar de los rendimientos condicionada a \mathcal{F}_{t-1} se define como:

$$\sigma_t = \sqrt{\mathbb{V}[r_t | \mathcal{F}_{t-1}]} \quad (21)$$

El objetivo es estimar en el instante t el valor de σ_{t+1} . El problema es que la volatilidad no es observable directamente, y solamente puede ser estimada. Esto dificulta el análisis de los resultados cuando queremos comparar varios modelos. En el siguiente capítulo veremos cuál es la metodología y cómo enfrentarnos al problema.

2.3.1 Características de la volatilidad

La volatilidad se suele relacionar con el riesgo, pero no son exactamente lo mismo. El riesgo está relacionado con un resultado no deseado, mientras que la volatilidad es una medida de incertidumbre y no implica necesariamente un resultado negativo. Como se ha descrito en este apartado, la volatilidad es una medida de dispersión de la distribución de una variable y no aporta información sobre su forma, excepto en el caso normal o log-normal, en cuyo caso la media μ y la desviación típica σ son estadísticos suficientes y su distribución de probabilidad se puede reproducir.

A continuación se van a estudiar las características más importantes de la volatilidad. Estas propiedades son importantes porque los modelos intentan reproducirlas para conseguir mayor

capacidad de predicción. Según (Engle & Patton, 2001) cualquier modelo que pretenda predecir bien la volatilidad debería tener en cuenta las siguientes características:

- Agrupación (clustering): la media de los rendimientos se mantiene en torno a cero a lo largo de la serie, en cambio, la varianza varía a lo largo del tiempo. En la Figura 2.2, se muestran los rendimientos del índice S&P500. Se pueden apreciar periodos que sufren muchas variaciones y otros con menos variaciones, es decir, hay periodos en los que la volatilidad es alta y otros en los que es baja. Esta tendencia de la volatilidad a agruparse en periodos de valor similar se conoce como agrupamiento o clustering. Esta característica evidencia que la volatilidad de los periodos anteriores influye en el actual o en los inmediatamente siguientes, (Chou, 1988).

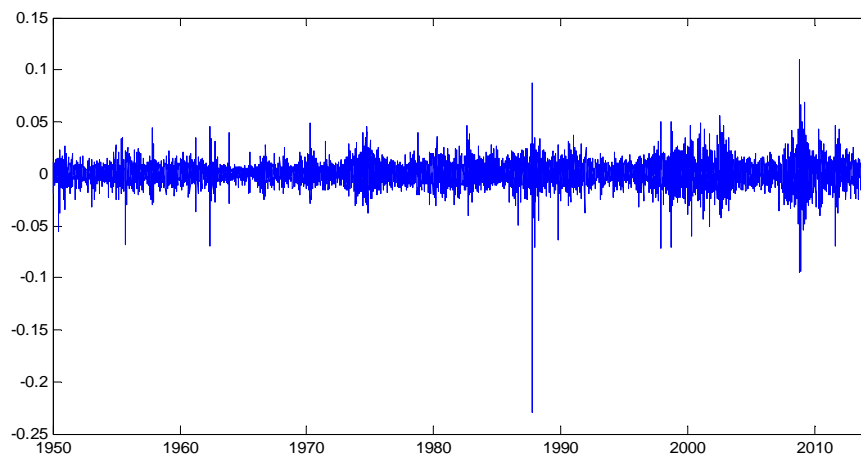


Figura 2.2. Rendimientos diarios del índice S&P 500 desde enero de 1950 hasta mayo de 2014.

- Asimetría o efecto apalancamiento: los precios de los activos pueden experimentar grandes variaciones puntuales, es decir, grandes subidas o bajadas de precio. El comportamiento de la volatilidad frente a grandes variaciones depende del signo del retorno. La volatilidad tiende a incrementarse más si los retornos anteriores han sido negativos.

Esta asimetría se conoce como efecto apalancamiento (*leverage effect*, en inglés). Muchos autores la han demostrado, por ejemplo, (Nelson, 1991). En el próximo capítulo veremos modelos asimétricos que tratan a las innovaciones positivas y negativas de forma distinta, y otros modelos que no incluyen este efecto.

2.3 VOLATILIDAD

- Distribución de probabilidad: la distribución de probabilidad de los retornos no es gaussiana, es leptocúrtica, es decir, presentan una distribución con mayor apuntamiento y colas más elevadas (*heavy tails*). Normalmente, se suelen usar modelos con distribuciones gaussianas, existiendo variantes de los mismos que usan otras distribuciones para contemplar este fenómeno. La distribución t-Student es una de las más utilizadas y la que utilizaremos en los experimentos junto con la distribución gaussiana.

En la figura siguiente, se muestra la función de densidad de probabilidad de una variable normal y de una variable t-Student, y el detalle de sus colas. Se puede observar como la cola de la t-Student está por encima de la cola de la distribución normal.

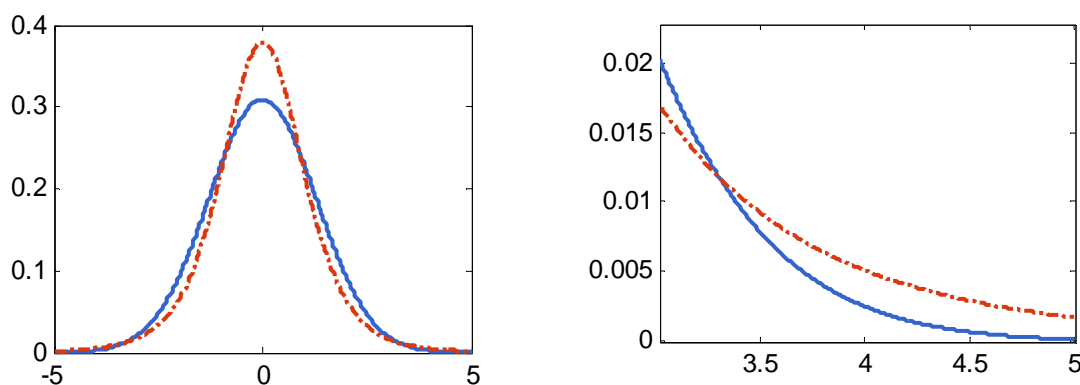


Figura 2.3. Distribución Normal (trazo continuo azul) y t-Student con 5 grados de libertad (trazo discontinuo rojo). Ambas tienen $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 5/3$.

- Reversión a la media: existe un valor medio al que la volatilidad tiende a largo plazo y, aunque la volatilidad presente *clustering*, los periodos de alta volatilidad se suelen compensar con periodos de baja volatilidad. En la práctica, se establecen intervalos de confianza para los que se debería cumplir la reversión a la media. Estos intervalos serán más largos o más cortos dependiendo del nivel de significancia fijado.

- Influencia de variables exógenas: son variables que influyen indirectamente en la volatilidad, en inglés, *spillover effects*. Por ejemplo, los cambios de la política económica, el aumento del consumo, ciertas decisiones empresariales, la geopolítica.... pueden influir en la volatilidad de un activo, aunque esta característica no se restringe a la volatilidad. Existen estudios como (Ross,

1989) sobre la influencia en la volatilidad de los flujos de información entre mercados, y otros no relacionados con la volatilidad como (Bedendo & Colla, 2013) que demuestran que el aumento del riesgo soberano aumenta de forma significativa el riesgo de crédito¹ de las empresas.

La alta volatilidad de las sesiones que coinciden con una reunión del BCE, o las intervenciones del presidente² del BCE para estabilidad de la zona Euro son otros ejemplos en los que se puede observar esta característica.

- Memoria a largo plazo (*long memory*) o persistencia: este efecto se puede observar cuando la influencia de la volatilidad se disipa lentamente en el tiempo, después de haberse producido fuertes variaciones en el precio de un activo. Para detectar esta característica se utiliza la autocorrelación de los rendimientos absolutos elevados a cierta potencia (Ding, Granger, & Engle, 1993).

2.4 Variable *proxy*

Un *proxy* se utiliza para representar una variable que no es observable o que resulta demasiado complejo obtenerla. Por ejemplo, se puede emplear el PIB per cápita para medir la calidad de vida de un país, o utilizar el número de bibliotecas por habitante para medir el nivel cultural.

La predicción de volatilidad implica el uso de *proxies* porque la volatilidad no es observable directamente. Para evaluar las predicciones se emplean dos de los *proxies* más utilizados en la literatura: los rendimientos al cuadrado r_t^2 y la volatilidad realizada³ (rv).

Los dos estimadores son insesgados, pero r_t^2 es un estimador más ruidoso que la volatilidad realizada, ya que esta se calcula con series de datos intradiarios. En la Figura 2.4 se puede observar un ejemplo para el futuro del IBEX 35 PLUS.

¹ El riesgo de crédito puede definirse como “la pérdida potencial ocasionada por el hecho de que un deudor o contraparte incumpla con sus obligaciones de acuerdo con los términos establecidos.” (Comité de supervisión Bancaria de Basilea, 1999)

² “The ECB is ready to do whatever it takes to preserve the euro, believe me, it will be enough”. Véase <http://tinyurl.com/cheknkn>

³ Existen otros *proxies* como $|r|$ o el rango *high/low*. Destacar el trabajo de (De Vilder & Visser, 2007) que demuestran el concepto de *proxy* óptimo con la intención de encontrar un *proxy* que sea mejor que la volatilidad realizada.

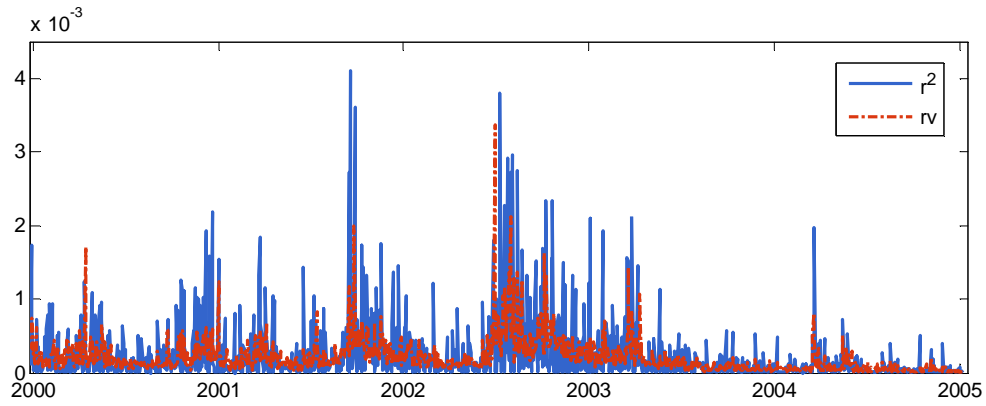


Figura 2.4. Estimaciones de las volatilidad del futuro del IBEX 35 PLUS. Enero 2000 – diciembre 2004.

Definición 2.15

La volatilidad realizada¹ se define como:

$$rv_t = \sum_{i=1}^m (p_{t,i} - p_{t,i-1})^2 = \sum_{i=1}^m r_{i,m,t}^2 \quad (22)$$

La serie de los retornos intradía se compone de m observaciones diarias de los retornos al cuadrado para el día t . Por tanto, $r_{i,m,t}^2$ es el retorno intradía i -ésimo del día t . Hay que destacar que la volatilidad realizada tiende al verdadero valor de la volatilidad cuando m tiende a infinito.

$$rv_t \rightarrow \sigma_t^2, \quad \text{si } m \rightarrow \infty \quad (23)$$

La utilización de dos *proxies* nos permitirá observar si los resultados de los experimentos varían al utilizar *proxies* distintos. Para analizar estas discrepancias, los modelos se ordenarán en función de su rendimiento para tener una clasificación de los modelos. En el siguiente capítulo, se

¹ La volatilidad realizada también puede denominarse CSR (*Cumulative Squared Return*) como en (Lázaro Gredilla et al., 2006).

explican las relaciones entre estos *rankings*, los *proxies* y las funciones de error que se emplean para medir la capacidad predictiva de los modelos.

Capítulo 3

Metodología de predicción

En este capítulo se explica la metodología utilizada para la predicción de volatilidad, los conceptos de función de error y *función robusta*, y el papel que desempeñan, junto con el *proxy*, a la hora de medir la capacidad predictiva de los modelos.

3.1 Procedimiento de predicción de la volatilidad

El procedimiento de predicción explicado en este apartado es la metodología normalmente utilizada cuando se emplean modelos ARCH para predecir volatilidad. En este trabajo este procedimiento se emplea para los modelos de la familia GARCH. En cambio, los modelos basados en algoritmos adaptativos no utilizan este procedimiento porque los parámetros se obtienen en tiempo de ejecución, como se explicará en detalle en el apartado 4.2.

A continuación, se explica el flujo y los tres procesos de los que se compone el procedimiento de predicción. Estos procesos se repiten iterativamente hasta calcular todas las predicciones necesarias.

- **Estimación de parámetros:** La serie de retornos diarios se divide en un conjunto de entrenamiento y en un conjunto de test. El conjunto de entrenamiento se emplea para estimar mediante máxima verosimilitud los parámetros del modelo. Este conjunto representa la información disponible para realizar las predicciones, es decir, si fijamos el horizonte temporal en el día $t - 1$ y se quiere predecir la volatilidad para el día t , el conjunto de entrenamiento estará formado por los rendimientos de los días anteriores, $t = 1, \dots, t - 1$. Por otro lado, el conjunto de test se emplea para evaluar las predicciones, y representa la información futura que no está disponible para el periodo $t - 1$, que es el instante en el que se realiza la predicción para el día t .

Una vez se ha decidido el conjunto de entrenamiento, se estiman los parámetros maximizando la función de log-verosimilitud (LLF, *Log-Likelihood Function*) de los retornos observados r_t . Se puede expresar como:

$$\text{LLF} = \log \left(\prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t^2}} e^{-\frac{r_t^2}{2h_t^2}} \right) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\log(h_t^2) + \frac{r_t^2}{h_t^2} \right) \quad (24)$$

donde T es el número de periodos de tiempo sobre los que se aplica, y h_t son las predicciones de la volatilidad dadas por un determinado modelo¹.

- **Calcular predicción:** Una vez estimados los parámetros, se calcula el modelo para obtener la predicción del día t , denotado como h_t .
- **Desplazar horizonte de predicción:** Para avanzar el horizonte de predicción hay que incorporar la muestra t al conjunto de entrenamiento y calcular la predicción $t + 1$. Este proceso se repetirá tantas veces como número de muestras tenga el conjunto de test para conseguir las predicciones siguientes. En la Figura 3.1 se presentan dos diagramas de flujo para entender mejor las etapas del procedimiento de predicción.

Además de las fases estudiadas, el procedimiento anterior debe definir una estrategia de estimación para calcular los parámetros del modelo. Esta estrategia está formada por características como: la longitud del conjunto de entrenamiento, la frecuencia de estimación de los parámetros, las distribuciones de los rendimientos...

3.2 Evaluación de las predicciones

En este apartado se estudian los problemas que existen cuando se evalúan las predicciones de la volatilidad con *proxies* ruidosos, y se indican las funciones de error que se deben emplear para minimizar distorsiones en los resultados. Además, se describe el test de significancia estadística que se utiliza para comparar los modelos.

Como ya hemos comentado en anterioridad, el principal obstáculo cuando se intenta predecir la volatilidad es que es una variable no observable, por ese motivo se utilizan *proxies* insesgados como por ejemplo los retornos al cuadrado o la volatilidad realizada. Los *proxies* son

¹ Dada una determinada serie de rendimientos, es importante diferenciar los términos σ_t^2 , h_t y $\hat{\sigma}_t^2$. Estos denotan respectivamente la volatilidad real (no observable), las predicciones de un modelo y un determinado *proxy* de la volatilidad σ_t^2 .

3.2 EVALUACIÓN DE LAS PREDICCIONES

necesarios para poder evaluar las predicciones, pero la utilización de un *proxy* no asegura que los resultados obtenidos sean los mismos que si la verdadera volatilidad σ_t fuese utilizada.

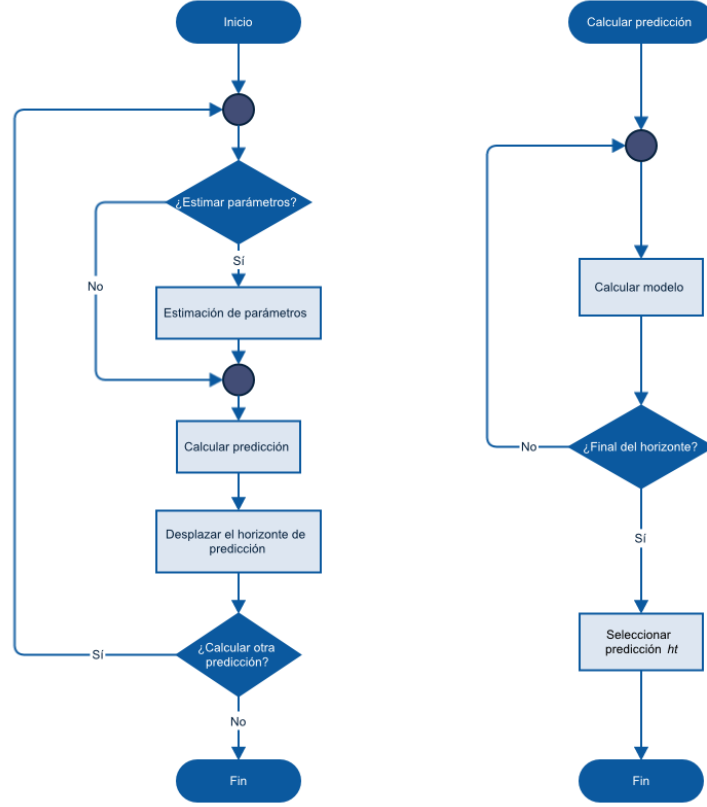


Figura 3.1. Diagrama de flujo del procedimiento de predicción.

El objetivo se reduce a encontrar la predicción óptima que minimiza una función de error L para un *proxy* determinado, lo que se expresa como:

$$h_t^* \equiv \operatorname{argmin}_{h_t \in \mathcal{H}} \mathbb{E}[L(\hat{\sigma}_t^2, h_t) | \mathcal{F}_{t-1}] \quad (25)$$

donde h_t^* es la predicción óptima, $\hat{\sigma}_t^2$ el *proxy*, \mathcal{H} es el conjunto de las posibles predicciones y \mathcal{F}_{t-1} es el conjunto de información disponible en el instante $t - 1$.

Cuando se comparan varios modelos se pueden realizar clasificaciones para evaluar los errores con un *proxy* determinado, y se espera que independientemente de la función de error utilizada estas clasificaciones no cambien. Sin embargo, esto no es así, existen numerosos estudios que encuentran discrepancias en los resultados cuando se emplean varias funciones de error, como (Andersen & Bollerslev, 1998), (Hansen & Lunde, 2005b), (Hansen & Lunde, 2006) o (Patton, 2009).

Patton estudió las discrepancias en las clasificaciones cuando se utilizaban funciones de error diferentes, y encontró un conjunto de funciones que no distorsionaba las clasificaciones de los modelos¹. Estas funciones se denominan *robust functions*, en inglés, a partir de ahora las denominaremos *funciones robustas* frente al ruido. (Patton, 2009) define una *función robusta* de la forma siguiente:

Definición 3.1

Una función L es *robusta* si los errores de dos predicciones de la volatilidad, h_{1t} y h_{2t} , obtienen el mismo resultado tanto si se evalúan con un *proxy* insesgado, $\hat{\sigma}_t^2$, o con la verdadera volatilidad latente, σ_t^2 .

$$\mathbb{E}[L(\sigma_t^2, h_{1t})] \lesseqgtr \mathbb{E}[L(\sigma_t^2, h_{2t})] \Leftrightarrow \mathbb{E}[L(\hat{\sigma}_t^2, h_{1t})] \lesseqgtr \mathbb{E}[L(\hat{\sigma}_t^2, h_{2t})] \quad (26)$$

$$\forall \hat{\sigma}_t^2 / \mathbb{E}[\hat{\sigma}_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_t^2 \quad (27)$$

De la definición anterior se puede desprender que una función es *robusta* si la volatilidad real es la predicción óptima. Si se desarrolla a partir de las Ecuaciones (25) y (26) se obtiene:

¹ Si las predicciones con las que se trabaja son imperfectas (*imperfect forecast*, en inglés) la clasificación de los modelos puede variar utilizando *funciones robustas*. (Patton, 2009) emplea tests de Mincer-Zarnowitz para determinar si las predicciones son imperfectas.

3.2 EVALUACIÓN DE LAS PREDICCIONES

$$h_t^* = \mathbb{E}[\hat{\sigma}_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_t^2 \quad (28)$$

Por tanto, la predicción de volatilidad se reduce a minimizar el error de predicción utilizando una función error y un *proxy* determinados. El *proxy* debe ser insesgado y la función de error debe ser *robusta* para intentar que a la hora de analizar los resultados se obtengan las menores distorsiones posibles.

3.2.1 Funciones de error: MSE y QLIKE

Patton también llegó a un resultado interesante reduciendo el conjunto de funciones *robustas* a las funciones de error MSE y QLIKE. Estas funciones son las únicas de todo el conjunto que dependen del error de predicción ($\hat{\sigma}_t^2 - h_t$) y del error de predicción estandarizado ($\hat{\sigma}_t^2 / h_t$) respectivamente, y son las que utilizaremos en los experimentos:

$$\text{MSE: } L(\hat{\sigma}_t^2, h_t) = (\hat{\sigma}_t^2 - h_t)^2 \quad (29)$$

$$\text{QLIKE: } L(\hat{\sigma}_t^2, h_t) = \frac{\hat{\sigma}_t^2}{h_t} - \log\left(\frac{\hat{\sigma}_t^2}{h_t}\right) - 1 \quad (30)$$

donde $\hat{\sigma}_t^2$ es un *proxy* insesgado y h_t las predicciones de la volatilidad.

QLIKE se prefiere frente a MSE porque es independiente del nivel de volatilidad, es decir, un valor alto de MSE no significa necesariamente que las predicciones no sean buenas, sino que puede deberse a que la volatilidad sea alta. Por otro lado, las simulaciones realizadas en (Patton & Sheppard, 2009) sugieren que la función QLIKE obtiene mejores resultados cuando se utilizan test DMW. Este test se utiliza en econometría para comparar la precisión de las predicciones y se analiza en el siguiente subapartado.

En los experimentos realizados también se han utilizado las versiones normalizadas de las funciones anteriores, denotadas como NMSE y NQLIKE respectivamente. Se han normalizado

respecto al error que se obtiene al utilizar la media del *proxy* $\overline{\hat{\sigma}_t^2}$ como la serie de predicciones h_t . En el caso de NMSE este valor coincide con la varianza del *proxy* utilizado $\sum_t (\hat{\sigma}_t^2 - \overline{\hat{\sigma}_t^2})^2$.

$$NMSE: \frac{\sum_t (\hat{\sigma}_t^2 - h_t)^2}{\sum_t (\hat{\sigma}_t^2 - \overline{\hat{\sigma}_t^2})^2}, \quad \overline{\hat{\sigma}_t^2} = \frac{1}{T} \sum_t \hat{\sigma}_t^2 \quad (31)$$

$$NQLIKE: \frac{\sum_t \hat{\sigma}_t^2 / h_t - \log \left(\hat{\sigma}_t^2 / h_t \right) - 1}{\sum_t \hat{\sigma}_t^2 / \overline{\hat{\sigma}_t^2} - \log \left(\hat{\sigma}_t^2 / \overline{\hat{\sigma}_t^2} \right) - 1}, \quad \overline{\hat{\sigma}_t^2} = \frac{1}{T} \sum_t \hat{\sigma}_t^2 \quad (32)$$

donde T es el número total de periodos y $\overline{\hat{\sigma}_t^2}$ es la media del *proxy*.

El valor medio del *proxy* en estos errores se puede tomar como un modelo respecto al que comparamos el nuestro. Si el error normalizado es mayor que uno, significa que el valor medio del *proxy* es un modelo con mayor capacidad de predicción que el que estamos analizando, y la capacidad de predicción de nuestro modelo es mejorable. Por tanto, estos errores están realizando implícitamente una comparación con un modelo hipotético.

3.2.2 Test de significancia estadística

Un test de significancia estadística es un contraste de hipótesis para comparar la precisión de las predicciones de dos modelos diferentes, y observar si las dos series de error son significativamente diferentes. Los test más utilizados son los test DM (Diebold & Mariano, 1995) y test DMW (West, 1996). El test DM solo permite conocer si un modelo tiene diferente capacidad de predicción pero no permite la comparación entre ellos. En cambio el test DMW si permite la comparación directa de los modelos porque se compone de dos hipótesis alternativas.

Consideremos dos predicciones para dos modelos diferentes, h_{1t} y h_{2t} , y las funciones de error para un determinado *proxy*, $L(\hat{\sigma}_t^2, h_{1t})$ y $L(\hat{\sigma}_t^2, h_{2t})$.

3.2 EVALUACIÓN DE LAS PREDICCIONES

$$\begin{aligned} H_0 &: \mathbb{E}[L(\hat{\sigma}_t^2, h_{1t})] = \mathbb{E}[L(\hat{\sigma}_t^2, h_{2t})] \\ H_1 &: \mathbb{E}[L(\hat{\sigma}_t^2, h_{1t})] > \mathbb{E}[L(\hat{\sigma}_t^2, h_{2t})] \\ H_2 &: \mathbb{E}[L(\hat{\sigma}_t^2, h_{1t})] < \mathbb{E}[L(\hat{\sigma}_t^2, h_{2t})] \end{aligned} \quad (33)$$

(Patton & Sheppard, 2009)

Se calcula el diferencial de las funciones de error, d_t :

$$d_t = L(\hat{\sigma}_t^2, h_{1t}) - L(\hat{\sigma}_t^2, h_{2t}) \quad (34)$$

El estadístico DMW se calcula utilizando un test-t:

$$DMW_t = \frac{\sqrt{T}\bar{d}}{\sqrt{\widehat{\text{avar}}[\sqrt{T}\bar{d}]}} \quad (35)$$

donde $\bar{d} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T d_t$ y $\widehat{\text{avar}}[\sqrt{T}\bar{d}]$ es un estimador de la varianza asintótica de $\sqrt{T}\bar{d}$. El test sigue una distribución normal bajo la hipótesis nula, permitiendo que la comparación entre dos modelos sea sencilla.

La hipótesis nula cumple que $DMW_t \sim N(0,1)$, entonces, podemos rechazar la hipótesis nula de igual capacidad de predicción con un 5% de significancia si:

$$|DMW_t| > 1.96 \quad (36)$$

Capítulo 4

Modelos de volatilidad

En este capítulo se describen los modelos que se van utilizar en los experimentos analizados en el Capítulo 5. Primero se definen los modelos de heterocedasticidad condicional autorregresiva (ARCH), que forman parte de la mayoría de estudios sobre volatilidad. También se estudian dos modelos basados en los modelos ARCH, pero que usan los algoritmos adaptativos LMS y RLS para calcular los parámetros del modelo de forma *online*¹. Por último, se describen dos modelos que no pertenecen a la familia GARCH pero son muy utilizados en finanzas, la volatilidad histórica (HIS) y el modelo RiskMetrics.

4.1 Familia de modelos ARCH

A raíz del modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) de (Engle, 1982) han surgido muchos otros modelos con diferentes enfoques. El número de modelos ha crecido tanto en los últimos años, que incluso se han realizados estudios para identificarlos. Por ejemplo, en (Bollerslev, 2008) se recoge una amplia especificación de todos los modelos ARCH, y en (Hansen & Lunde, 2005b) se resume la familia a dieciséis modelos.

En este proyecto solo se consideran los cinco modelos más comunes que sirven para representar la esencia de toda la familia. A continuación, se van a explorar los diferentes enfoques de estos modelos, describiendo el modelo ARCH y los cinco modelos que utilizaremos en los experimentos.

¹ Los algoritmos *online* (ver pág. 55) incorporan los datos muestra a muestra a la solución. Por el contrario, los algoritmos *batch* procesan los datos en modo bloque para proporcionar una única solución.

4.1.1 Modelo ARCH

Se introdujo para predecir la volatilidad de la inflación de Reino Unido y capturar el fenómeno del *clustering* de la volatilidad. El modelo emplea únicamente los retornos al cuadrado r_t^2 sin calcular las desviaciones estándar de los instantes anteriores como hacían los modelos previos.

$$r_t = \epsilon_t \sqrt{h_t} \quad \epsilon_t \sim D(0,1) \quad (37)$$

donde h_t es la varianza condicional de r_t y ϵ_t es la innovación, que es un proceso i.i.d. de media cero y varianza uno. Este término normalmente recibe el nombre de innovación y representa la información nueva respecto al periodo anterior. La función de distribución D suele ser una normal.

Un modelo ARCH(q) se expresa como:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j r_{t-j}^2 \quad (38)$$

En la expresión anterior los parámetros del modelo están representados por α_i , donde es necesario $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_j \geq 0$ para asegurar que h_t es estrictamente positivo y $\sum_{j=1}^q \alpha_j < 1$ para que la varianza incondicional no diverja y el modelo sea estacionario en sentido amplio.

Engle concluyó que el orden del modelo debe ser alto para que el modelo funcione adecuadamente y capture la persistencia de la volatilidad. Dada la necesidad de estimar muchos parámetros el modelo termina siendo demasiado complejo en muchos casos.

En (Tsay, 2005) se presentan otros inconvenientes del modelo:

- El tratamiento de los rendimientos positivos y negativos es el mismo. Como se ha estudiado, las innovaciones negativas hacen que la volatilidad aumente más que las positivas, es decir, el modelo no refleja el efecto apalancamiento.
- No proporciona un mecanismo nuevo para entender el comportamiento de las series financieras, solo facilita una nueva forma para describir la varianza condicional.

4.1 FAMILIA DE MODELOS ARCH

- Las predicciones calculadas suelen ser más altas que la verdadera volatilidad, ya que el modelo responde lentamente a los rendimientos muy elevados.

4.1.2 Modelo GARCH

El modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic) propuesto en (Bollerslev, 1986) es una generalización del modelo ARCH. Bollerslev consiguió un modelo más sencillo porque GARCH depende de los rendimientos y de las varianzas anteriores, de esta forma se consigue representar la volatilidad con menos parámetros.

La expresión de un modelo GARCH(p, q) se escribe como:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^q \alpha_j r_{t-j}^2 \quad (39)$$

donde los parámetros de los que depende el modelo son α_0 , α_j y β_i , que deben ser mayores que cero, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_j \geq 0$ y $\beta_i \geq 0$, para evitar que h_t sea negativa. Además, la suma de los coeficientes debe ser menor que uno para que el proceso sea estacionario en sentido amplio y la varianza incondicional sea finita.

$$\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \alpha_j < 1 \quad (40)$$

Los modelos vistos hasta ahora no tienen en cuenta el efecto apalancamiento, es decir, el comportamiento asimétrico de la volatilidad. El resto de modelos GARCH que vamos a estudiar intentan reflejar de alguna forma esta característica.

4.1.3 Modelo TGARCH

El modelo TGARCH (Threshold GARCH) contempla los efectos de asimetría añadiendo el término N_t .

El modelo TGARCH(p, q) se escribe como:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^q (\alpha_j + \gamma_j N_{t-j}) r_{t-j}^2$$

$$N_{t-j} = \begin{cases} 1 & \text{si } r_{t-j} < 0 \\ 0 & \text{si } r_{t-j} \geq 0 \end{cases} \quad (41)$$

En esta expresión $\alpha_0 > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ y $\gamma_j \geq 0$ para que la volatilidad sea positiva. El proceso es estacionario en sentido amplio si cumple la siguiente condición:

$$\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q (\alpha_j + \frac{1}{2} \gamma_j) < 1 \quad (42)$$

El término para los rendimientos positivos es $\alpha_j r_{t-j}^2$, mientras que para los negativos es $(\alpha_j + \gamma_j) r_{t-j}^2$, así consigue reflejar la asimetría de la volatilidad. El umbral N_t suele ser cero pero se puede utilizar otro distinto.

Este modelo también recibe el nombre de GJR-GARCH, este nombre hace referencia a sus autores (Glosten, Jagannathan, & Runkle, 1993).

4.1.4 Modelo EGARCH

El modelo EGARCH (Exponential GARCH) de (Nelson, 1991) consigue reflejar la asimetría de la volatilidad mediante una función $g(\epsilon_t)$ que pondera las innovaciones.

La función $g(\epsilon_t)$ se define como:

$$g(\epsilon_t) = \gamma \epsilon_t + \alpha (|\epsilon_t| - \mathbb{E}[|\epsilon_t|])$$

$$\mathbb{E}[g(\epsilon_t)] = 0 \quad (43)$$

donde $\gamma, \alpha \in \mathbb{R}$ son constantes y $\epsilon_t = r_t / \sqrt{h_t}$ es la innovación, i.i.d. de media cero y varianza uno.

El modelo EGARCH(p, q) se puede escribir de la siguiente forma:

4.1 FAMILIA DE MODELOS ARCH

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(h_{t-i}) + \sum_{k=1}^p \alpha_k g(\epsilon_{t-k}) \quad (44)$$

Cuando $\gamma < 0$ los rendimientos negativos tienen mayor peso que los rendimientos positivos. Debido a su forma logarítmica es más complejo trabajar con este modelo, pero consigue que la volatilidad sea siempre positiva y que no sea necesario que sus parámetros satisfagan ninguna condición de no negatividad.

El proceso es estacionario en sentido amplio si cumple la siguiente condición:

$$\sum_{i=1}^p \beta_i < 1 \quad (45)$$

4.1.5 Modelo AGARCH

Para definir el modelo AGARCH (Engle & Ng, 1993) estudiaron el efecto apalancamiento de las series ayudándose de un modelo asimétrico que Engle había formulado anteriormente. Además, utilizaron las *News Impact Curves* (NIC), en las que se representa la varianza condicional frente a las innovaciones en el periodo anterior, ϵ_{t-1} . Estas curvas se utilizan para observar el efecto apalancamiento de los modelos, ver Figura 4.1.

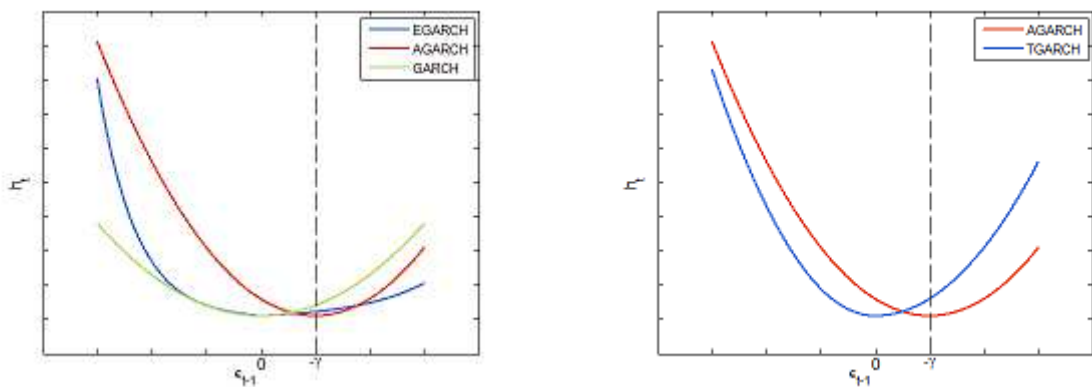


Figura 4.1. *News Impact curves* de las innovaciones para los modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) y AGARCH(1,1) (izq.) y para los modelos AGARCH(1,1) y TGARCH(1,1)

Los modelos vistos hasta ahora solamente consideran curvas NIC con el mínimo en cero, es decir, $\epsilon_{t-1} = 0$. Este modelo propone que el mínimo de la curva este desplazado respecto al origen para que el modelo refleje la asimetría de la volatilidad.

El modelo AGARCH¹ se puede escribir según la siguiente expresión:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^q \alpha_j (r_{t-j} + \gamma_j)^2 \quad (46)$$

Para que los rendimientos positivos ponderen con menor peso que los rendimientos negativos el parámetro γ debe ser menor que cero, $\gamma_j < 0$.

En este modelo (Engle & Ng, 1993) intentaron reflejar la asimetría de la volatilidad desde una perspectiva diferente, pero demostraron que no tiene capacidad suficiente para representar la volatilidad cuando se producen fuertes retornos negativos.

4.1.6 Modelo APARCH

Este modelo se propuso en (Ding et al., 1993) estudiando la persistencia (*long memory*) de la volatilidad, un comportamiento que se observa cuando se producen fuertes variaciones en los retornos y los efectos se desvanecen lentamente. El modelo utiliza la relación que existe entre la persistencia y la autocorrelación de $|r^\delta|$, contemplando la asimetría con el parámetro γ .

El modelo APARCH(p, q) se puede escribir de la siguiente forma:

$$h_t^{\delta/2} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}^{\delta/2} + \sum_{j=1}^q \alpha_j (|r_{t-j}^2| - \gamma_j r_{t-j})^\delta \quad (47)$$

Hay que destacar que el modelo APARCH es una expresión generalizada de los modelos de la familia ARCH. Por ejemplo, si $\delta = 2$ y $\gamma_j = 0$ se obtiene el modelo GARCH.

¹ El uso de los acrónimos no ha sido consistente por los autores en la literatura, se ha usado AGARCH para el método de (Engle & Ng, 1993), sin embargo, este mismo método en (Brownlees et al., 2009) lo enuncian como NGARCH (Nonlinear GARCH), del mismo modo ocurre con el modelo TGARCH, no existe consenso y puede variar dependiendo del autor.

4.2 MODELOS BASADOS EN ALGORITMOS ADAPTATIVOS ONLINE: LMS-GARCH Y RLS-GARCH

4.2 Modelos basados en algoritmos adaptativos online: LMS-GARCH y RLS-GARCH

En el apartado anterior se han estudiado algunos de los modelos GARCH más importantes que existen. Normalmente el modelo que se toma como referencia es el GARCH(1,1) porque es un modelo que solo depende de tres parámetros. Como se ha descrito anteriormente, los parámetros de este tipo de modelos deben ser estimados durante el periodo de entrenamiento. En cambio en (Lázaro Gredilla et al., 2006) se proponen los algoritmos LMS-GARCH y RLS-GARCH que presentan un procedimiento *online* para calcular estos parámetros. De esta forma, se elimina el concepto de periodo de entrenamiento y la necesidad de saber cuándo volver a estimarlos, haciendo que el periodo de entrenamiento se emplee únicamente para que los algoritmos LMS y RLS converjan y que posteriormente los métodos se vayan adaptando cada vez que esté disponible una nueva muestra.

Este tipo de modelos se basan en filtros adaptativos, es decir, en filtros que son capaces de cambiar los coeficientes en función de un algoritmo adaptativo. A su vez, estos algoritmos se ajustan a los cambios en tiempo de ejecución con el objetivo de minimizar cierta función de error.

Además, los algoritmos son *online*, es decir, son algoritmos que obtienen una salida según entran los datos, a diferencia de GARCH(1,1), en el que es necesario un proceso de optimización en modo bloque (*batch*) para calcular los parámetros mediante máxima verosimilitud.

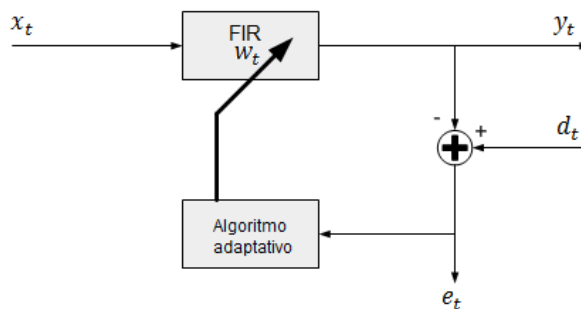


Figura 4.2. Esquema del problema de filtrado adaptativo. Fuente: CMSIS-DSP Software Library.

En la Figura 4.2, se puede observar el modelo de filtrado adaptativo clásico que se va emplear para la implementación de los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH, donde \mathbf{x}_t es la señal de entrada y \mathbf{w}_t son los coeficientes de un filtro FIR de orden M . El objetivo de este filtro es estimar linealmente la señal deseada d_t . La salida del filtro y_t responde a la siguiente expresión¹:

$$y_t = x_t * w_t = \sum_{k=0}^{M-1} w_t x_{t-k} = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_t$$

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ \vdots \\ x_{t-M+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_t \\ w_{t-1} \\ \vdots \\ w_{t-M+1} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Teniendo en cuenta la Ecuación (48), se puede expresar el modelo GARCH(1,1) como un filtro de orden 3 de la siguiente forma:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \Rightarrow h_t = \mathbf{w}^T \begin{bmatrix} 1 \\ r_{t-1}^2 \\ h_{t-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = [\alpha_0 \alpha_1 \beta_1]^T \quad (49)$$

De este modo la señal de entrada está formada por los rendimientos al cuadrado y la volatilidad del periodo anterior. La salida del filtro h_t es la predicción de σ_t^2 y los parámetros del modelo son los coeficientes del filtro \mathbf{w} .

Por otro lado, el error de estimación se puede expresar como:

$$e_t = d_t - h_t \quad (50)$$

¹ En este apartado se ha mantenido la notación utilizada en series financieras para las señales discretas \mathbf{x}_t , \mathbf{y}_t , \mathbf{d}_t y \mathbf{e}_t . Normalmente, en teoría de la señal la notación utilizada para estas señales es $\mathbf{x}[n]$, $\mathbf{y}[n]$, $\mathbf{d}[n]$ y $\mathbf{e}[n]$. La Ecuación (48) se escribiría como: $y[n] = x[n] * w[n] = \sum_{k=0}^{M-1} w[n] x[n-k] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_t$.

4.2 MODELOS BASADOS EN ALGORITMOS ADAPTATIVOS ONLINE: LMS-GARCH Y RLS-GARCH

siendo d_t la señal de referencia o el valor deseado de la volatilidad para el instante t . Esta señal puede tomar como valor la serie de los rendimientos al cuadrado r_t^2 o la volatilidad realizada rv . No hay que confundir d_t , que forma parte del modelo, con el *proxy* empleado en la fase de análisis de resultados.

De este modo, se puede emplear información intradía a distintas frecuencias. Será interesante comparar los resultados de este tipo de algoritmos con los modelos de la familia GARCH que solo utilizan información diaria.

También hay que destacar que estos modelos solo dependen de un parámetro que controla la velocidad de convergencia, habitualmente denotado como μ en LMS, o λ que limita la memoria del algoritmo en RLS.

4.2.1 Algoritmos adaptativos de los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH

A continuación se describe la solución al problema de filtrado de la Figura 4.2, así como los algoritmos adaptativos que forman parte de los modelos de este apartado. Si el lector está interesado en profundizar sobre estos algoritmos y el filtrado adaptativo puede consultar (Haykin, 2013) y (Sayed, 2003).

La solución óptima al problema de filtrado anterior se conoce como filtro de Wiener, cuyo objetivo es minimizar el error cuadrático medio de e_t . La expresión de la función de coste se obtiene a partir de la definición de e_t y la Ecuación (48):

$$\begin{aligned} e_t &= d_t - y_t \\ J(\mathbf{w}) &= \mathbb{E}[e_t^2] = \mathbb{E}[(d_t - y_t)^2] = \mathbb{E}[d_t^2] - 2\mathbf{p}^T \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (51)$$

donde $\mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T]$ es la matriz de autocorrelación de la señal de entrada y $\mathbf{p} = \mathbb{E}[d_t \mathbf{x}_t]$ es la correlación cruzada entre la señal deseada y la señal de entrada. Además, se considera que d_t y x_t son procesos estocásticos de medias nulas y estacionarios en sentido amplio.

Para obtener la solución óptima de Wiener hay que encontrar el vector \mathbf{w} que minimiza $J(\mathbf{w})$, es decir, el vector \mathbf{w} para el cual el gradiente es cero. El resultado son las ecuaciones de Wiener-Hopf en forma matricial:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}_{\text{opt}}) &= \mathbb{E}[2\mathbf{x}_t e_t] = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}\mathbf{w}_{\text{opt}} &= \mathbf{p}\end{aligned}\tag{52}$$

Antes de estudiar los algoritmos adaptativos LMS y RLS se va a considerar una solución iterativa para resolver las ecuaciones de Wiener-Hopf. Este tipo de soluciones se basan en un algoritmo que actualiza los coeficientes del filtro en cada iteración, alcanzando la solución óptima de Wiener después de un suficiente número de iteraciones.

El algoritmo más sencillo es el de descenso por máxima pendiente, cuya ecuación de actualización se obtiene desarrollando el gradiente de la función de error:

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \frac{\mu}{2} \nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}_t) = \mathbf{w}_t + \mu(\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{w}_t)\tag{53}$$

Se puede apreciar que al igual que ocurría en el filtro de Wiener, es necesario conocer la matriz de autocorrelación de la señal de entrada \mathbf{R} , y el vector de correlación cruzada entre esta señal de entrada y la señal deseada, \mathbf{p} . De manera que este algoritmo implementa una solución iterativa, pero no es un algoritmo *online*.

Los algoritmos LMS y RLS actualizan los coeficientes del filtro sin conocer los estadísticos \mathbf{R} y \mathbf{p} , permitiendo adaptarse a cambios de los mismos, es decir, se adaptan a cambios de la solución óptima. Sin embargo, no son capaces de alcanzar la solución óptima de Wiener una vez que han convergido. A continuación se describen estos algoritmos, así como los diferentes enfoques para aprender los estadísticos anteriores.

4.2.1.1 Algoritmo LMS

El algoritmo LMS (Least Mean Square) fue creado por (Widrow y Hoff, 1960), y se ha convertido en uno de los algoritmos adaptativos más importantes debido a su fácil implementación y bajo coste computacional. LMS es un algoritmo iterativo basado en el método de descenso por máxima pendiente, sustituyendo el gradiente determinista por un gradiente estocástico.

4.2 MODELOS BASADOS EN ALGORITMOS ADAPTATIVOS ONLINE: LMS-GARCH Y RLS-GARCH

De esta forma, el cálculo del gradiente se realiza mediante estimaciones instantáneas de la matriz \mathbf{R} y el vector \mathbf{p} :

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}_t) &\approx -2(\widehat{\mathbf{p}}_t - \widehat{\mathbf{R}}_t \mathbf{w}_t) = -2\mathbf{x}_t(d_t - \mathbf{x}_t^T \mathbf{w}_t) \\ \widehat{\mathbf{R}}_t &= \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T, \quad \widehat{\mathbf{p}}_t = \mathbf{x}_t d_t\end{aligned}\tag{54}$$

La expresión de actualización de los coeficientes del filtro queda de este modo:

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t + \mu \mathbf{x}_t(d_t - \mathbf{w}_t^T \mathbf{x}_t) = \mathbf{w}_t + \mu \mathbf{x}_t e_t\tag{55}$$

Cabe destacar que la ecuación también se puede obtener mediante la aproximación instantánea de la función de error:

$$\begin{aligned}J(\mathbf{w}_t) &= \mathbb{E}[e_t^2] \approx e_t^2 \\ \nabla_{\mathbf{w}} e_t^2 &= -2\mathbf{x}_t e_t\end{aligned}\tag{56}$$

El paso de adaptación μ controla tanto la velocidad de convergencia del algoritmo como el desajuste final del algoritmo respecto a la solución óptima. La aproximación realizada para calcular el gradiente produce movimientos aleatorios en la actualización de los coeficientes, a los que se denomina ruido de gradiente. Por ese motivo cuando el algoritmo converge, el error es mayor que el obtenido con el filtro de Wiener, teniendo que llegar a un compromiso entre la velocidad de convergencia y el exceso de ruido.

4.2.1.2 Algoritmo RLS

El algoritmo RLS (Recursive least square) aproxima la solución óptima de Wiener a partir del error cuadrático acumulado hasta el instante actual. A diferencia de LMS que plantea una solución estocástica, en RLS las señales se consideran deterministas. De modo que el algoritmo se puede derivar como una solución exacta al igual que en el filtro de Wiener.

Partimos de su función de coste que está definida por la siguiente ecuación:

$$J(\mathbf{w}_t) = \sum_{i=1}^N \lambda^{N-i} e_t^2 = \sum_{i=1}^N \lambda^{N-i} (d_t - \mathbf{w}_t^T \mathbf{x}_t)^2 \quad (57)$$

En la expresión anterior, λ es el factor de olvido. Este parámetro pondera los errores de los instantes anteriores dando más importancia a los más recientes.

Si se deriva la función de coste respecto a los coeficientes, el resultado es una ecuación en forma matricial similar a la solución óptima de Wiener:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_t &= \boldsymbol{\Phi}_t^{-1} \boldsymbol{\theta}_t \\ \boldsymbol{\Phi}_t &= \sum_{i=1}^N \lambda^{N-i} \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T, \quad \boldsymbol{\theta}_t = \sum_{i=1}^N \lambda^{N-i} d_t \mathbf{x}_t^T \end{aligned} \quad (58)$$

donde $\boldsymbol{\Phi}_t$ y $\boldsymbol{\theta}_t$ son las aproximaciones de los estadísticos \mathbf{R} y \mathbf{p} respectivamente.

Para evitar la inversión de la matriz $\boldsymbol{\Phi}_t$ en cada iteración es necesaria la aplicación del lema de inversión matricial, y expresar en forma recursiva la matriz $\mathbf{P}_t = \boldsymbol{\Phi}_t^{-1}$ y el vector $\boldsymbol{\theta}_t$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_t &= \lambda \boldsymbol{\Phi}_{t-1} + \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T, \quad \boldsymbol{\theta}_t = \lambda \boldsymbol{\theta}_{t-1} + d_t \mathbf{x}_t^T \\ \mathbf{P}_t &= \lambda^{-1} (\mathbf{P}_{t-1} - \mathbf{g}_t \mathbf{x}_t^T \mathbf{P}_{t-1}) \end{aligned} \quad (59)$$

donde \mathbf{g}_t se denomina vector de ganancia y se calcula como:

$$\mathbf{g}_t = \frac{\lambda^{-1} \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{x}_t}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}_t^T \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{x}_t} \quad (60)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores se puede desarrollar la ecuación $\mathbf{w}_t = \mathbf{P}_t \boldsymbol{\theta}_t$ para obtener la ecuación de actualización de los coeficientes del filtro:

4.2 MODELOS BASADOS EN ALGORITMOS ADAPTATIVOS ONLINE: LMS-GARCH Y RLS-GARCH

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{g}_t(d_t - \mathbf{w}_{t-1}^T \mathbf{x}_t) \quad (61)$$

La convergencia del algoritmo RLS es mucho más rápida que LMS. Por otro lado, aunque RLS se pueda expresar sin tener que calcular la inversa de Φ_t en cada iteración, es un algoritmo más complejo y tiene mayor coste computacional que LMS.

También existe un compromiso entre capacidad de adaptación, desajuste final y velocidad de convergencia. En este caso se controla con el factor de olvido λ , cuanto más memoria posea el algoritmo, es decir, λ se acerca a 1, el desajuste es menor pero la capacidad de seguimiento empeora. En cambio, cuando se reduce la memoria, mejora la capacidad de seguimiento pero aumenta el desajuste y los problemas de estabilidad numérica.

4.2.2 Inestabilidad de los modelos LSM-GARCH y RLS-GARCH

Los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH proponen un nuevo enfoque para calcular los parámetros del modelo GARCH, y permiten la utilización de series intradía de alta frecuencia. Para ello los algoritmos LMS y RLS optimizan los coeficientes de un filtro FIR, minimizando el error entre la señal de salida del filtro y la señal deseada, pero los algoritmos no tienen en cuenta las restricciones de los coeficientes del modelo GARCH. En la Ecuación (40) se puede observar como la suma de los parámetros debe ser menor que uno para que el modelo cumpla la característica de la volatilidad de reversión a la media.

Teniendo en cuenta esta restricción se han modificado los algoritmos LMS y RLS para que actualicen los parámetros al final de cada iteración, si no se cumple la condición anterior. Para ello se ha utilizado una proyección al *simplex*.

Definición 4.1

El *n-simplex* estándar es el subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} que se puede escribir como:

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \ \forall i = 0, \dots, n \right\} \quad (62)$$

4.3 Otros modelos

En el sector financiero se emplean también otros modelos como la volatilidad histórica (HIS) y el modelo RiskMetrics. Estos modelos se utilizan porque son sencillos y no es necesario calcular ningún parámetro, por eso merece la pena utilizarlos junto con los modelos anteriores, (RiskMetrics, 1996).

4.3.1 Volatilidad histórica a n-días

Se calcula utilizando una ventana deslizante con los retornos de n días anteriores:

$$h_t = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r_{t-j}^2 \quad (63)$$

4.3.2 RiskMetrics

El modelo RiskMetrics es un caso particular del modelo EWMA (*Exponential Weighted Moving Average*) con $\lambda = 0.94$.

La expresión de la varianza para un modelo EWMA es:

$$h_t = \lambda h_{t-1} + (1 - \lambda) r_{t-1}^2 \quad (64)$$

Para inicializar el primer valor de la varianza, h_0 , se utiliza la varianza del conjunto de entrenamiento de los r_t^2 .

Capítulo 5

Resultados y análisis

En este capítulo se describe el conjunto de series utilizado, indicando su duración y cómo se han conseguido. Además, se presentan los experimentos realizados y los resultados obtenidos para cada una de las series.

Primero se analizan los modelos GARCH, estudiando diferentes estrategias de estimación de los parámetros para el modelo GARCH(1,1). Después se comparan los modelos: GARCH, TGARCH, EGARCH, AGARCH, APARCH, HIS y RiskMetrics.

Por otro lado, se comparan los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH con el modelo GARCH(1,1). Finalmente, se observa el comportamiento de la capacidad predictiva de los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH cuando se utilizan series intradía de diferentes frecuencias.

5.1 Conjunto de datos

Las series utilizadas se han obtenido a partir de las series de precios diarios e intradiarios correspondientes. Se han realizado comprobaciones para que las dos versiones contengan los mismos días, ya que en algunos casos el origen de los datos es distinto. Además, ha sido necesario procesar las series para conseguir la frecuencia adecuada, y eliminar o adaptar muestras cuando los retornos son iguales a cero o la serie ha sufrido un *scrip dividend*.

Las series financieras utilizadas se han agrupado en dos conjuntos según la pertenencia al mercado europeo o americano, y a su vez se han dividido en periodos de tres meses, coincidiendo con los trimestres del año.

5.1.1 Conjunto de series europeas

El conjunto de series europeas ha sido proporcionado por mis tutores de proyecto y se compone de los futuros de los índices bursátiles europeos: IBEX 35 PLUS y DJ EURO STOXX 50 (FESX), y de la cotización de las acciones del BBVA.

Las series IBEX y EURO STOXX se extienden desde abril de 2000 hasta diciembre de 2003. Los trimestres de 2002 y 2003 conforman los conjuntos de test, obteniendo de esta forma ocho periodos. En cambio, la serie BBVA comprende el periodo de julio de 2009 hasta marzo de 2012. En esta serie los conjuntos de test están formados por los últimos tres trimestres de 2010, los trimestres de 2011 y el primer trimestre de 2012.

Los periodos de entrenamiento para las tres series dependerán del modelo y la estrategia de estimación de los parámetros utilizados, ya que se va a estudiar el comportamiento de los modelos con diferentes tamaños y tipos de ventanas de entrenamiento, sin superar en cualquier caso los 21 meses.

5.1.2 Conjunto de series americanas

El conjunto de las series americanas está formado por seis valores cotizados en NASDAQ: Apple Inc. (AAPL), Amazon.com Inc. (AMZN), Google Inc. (GOOG), Microsoft Corporation (MSFT), Yahoo! Inc. (YHOO) y The Priceline Group Inc. (PCLN); y seis valores cotizados en la bolsa de Nueva York (NYSE): Bank of America Corporation (BAC), J. C. Penney Company, Inc. (JCP), Walgreen Co. (WAG), The Goldman Sachs Group, Inc. (GS), International Business Machines Corporation (IBM) y Merck & Co. Inc. (MRK).

La extensión de las series es más reducida que las anteriores, ya que comprende el periodo de octubre de 2013 a septiembre de 2014. Por tanto, como los conjuntos de test comprenden únicamente los meses del tercer trimestre de 2014, los periodos de entrenamiento no podrán ser mayores a nueve meses.

A diferencia del conjunto anterior, estas series se han obtenido realizando peticiones diarias a los servidores de *Yahoo finance*. Este proceso manual presenta la dificultad de que las series intradiarias solo están disponibles durante quince días en los servidores de Yahoo. Por este motivo se ha automatizado el proceso utilizando un servidor web Apache con un programa en

5.2 EXPERIMENTOS CON MODELOS GARCH

PHP. A partir de los datos obtenidos se han extraído las series de precios y posteriormente se han calculado los retornos diarios y las series de la volatilidad realizada.

5.2 Experimentos con modelos GARCH

En este apartado se analizan los experimentos realizados con los modelos clásicos estudiados en el apartado 4.1. Primero se observa el comportamiento del modelo GARCH(1,1) cuando realizamos cambios en la estrategia de estimación de los parámetros. Para ello se plantea una estrategia de estimación a la que llamaremos estrategia principal, y se intenta encontrar una estrategia alternativa que la mejore. Posteriormente se realiza una comparación de los modelos estudiados en los apartados 4.1 y 4.3.

Todos los experimentos se han realizado para cada una de las series de los conjuntos descritos en el apartado anterior.

5.2.1 Comparación de estrategias de estimación

La estrategia principal se compone de una ventana de estimación creciente, es decir, se considera el conjunto de entrenamiento desde el principio de la serie, y se van incluyendo muestras en este conjunto según avanza el horizonte de predicción. Para estimar los parámetros del modelo se utiliza una función de máxima verisimilitud gaussiana, y una frecuencia de actualización de los parámetros de una semana (5 días de cotización).

En las Tablas 3 a 10 (ver Apéndice A)¹ se muestran los errores de predicción QLIKE y MSE y sus versiones normalizadas NQLIKE y NMSE. Para cada tabla se calculan los errores con los dos *proxies* que hemos estudiado: los retornos al cuadrado r_t^2 y la volatilidad realizada rv , calculada con series intradía de 30 minutos. Por tanto, cada tabla tiene cuatro secciones que evalúan las predicciones con diferentes errores y *proxies*. Además, las tablas muestran con colores los resultados de los test de DMW respecto a GARCH(1,1) empleando la estrategia principal. Para estos test, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. El nivel de significancia es azul si es menor que 10%, verde si es menor que 5% y rojo si es menor que 1%.

¹ Para facilitar la legibilidad del documento, se ha preferido agrupar todas las tablas de resultados en los apéndices.

En la primera fila de cada sección se presentan los errores de predicción del modelo GARCH(1,1) utilizando la estrategia principal, y en las demás filas se muestran los errores de otros modelos GARCH(1,1) utilizando una versión modificada de esta estrategia. En las tablas de los errores QLIKE y MSE los errores de las estrategias alternativas se expresan como porcentaje de mejora (si es positivo) o empeoramiento (si es negativo) respecto a la estrategia principal. En cambio, en las tablas de los errores NQLIKE y NMSE se muestran los errores sin calcular ningún porcentaje. El objetivo de los errores normalizados es comparar las predicciones con el promedio de las variables *proxy*, por lo que los errores normalizados nos permiten observar directamente la capacidad predictiva del modelo utilizado.

Las modificaciones de la estrategia principal incluyen cambios en la distribución de las innovaciones, el tamaño de la ventana de entrenamiento y en la frecuencia de estimación de los parámetros. Si seguimos observando las tablas anteriores, vemos que en la segunda fila de cada sección, se modifica la distribución gaussiana de la función de verosimilitud por una distribución t-Student. En la fila tercera, cuarta y quinta se cambia la ventana creciente por una ventana deslizante de distintos tamaños: 3 meses, 9 meses y 21 meses respectivamente¹. Y en las últimas tres filas se modifica el periodo de reestimación de los parámetros: sin reestimar, reestimación diaria y reestimación mensual.

Los experimentos se han realizado para cada uno de los cuatro conjuntos de datos: futuros del IBEX 35 PLUS y DJ EURO STOXX 50 (FESX), BBVA y las 12 series de la bolsa americana.

5.2.1.1 Análisis de las series europeas

Los resultados obtenidos indican que la estrategia principal es la que posee mejor rendimiento para las series IBEX y EURO STOXX. En cambio, la reestimación mensual de los parámetros del modelo mejora el rendimiento de la serie BBVA.

La distribución t-Student no mejora el rendimiento de la estrategia principal en las tres series porque estamos realizando predicciones con un horizonte de un día. Si utilizáramos un horizonte mayor, tendríamos una serie de retornos r_t^2 con valores más altos, y se podría apreciar un

¹ Para la serie BBVA y las series americanas se dispone de un periodo de datos de 9 meses para el conjunto de entrenamiento, por eso en las Tablas 7 a 10 no se muestran los resultados con una ventana de entrenamiento de 21 meses.

5.2 EXPERIMENTOS CON MODELOS GARCH

aumento de rendimiento al utilizar una distribución de este tipo. Esto se debe a que la t-Student es una distribución leptocúrtica y los valores extremos son más verosímiles que si utilizamos una distribución normal (ver Figura 2.3), y de ese modo los parámetros del modelo se ajustarían mejor.

La mayoría de los experimentos responden peor a una ventana pequeña (3 meses) y se ha observado que progresivamente se van obteniendo mejores resultados conforme esta ventana se hace mayor y el conjunto de entrenamiento se convierte en toda la muestra disponible. Las tres series se comportan de este modo, por lo que se optará por mantener la ventana creciente de 21 meses en las series IBEX y EURO STOXX y de 9 meses para la serie BBVA. Si se tuvieran disponibles más datos se podría aumentar .

Hay que destacar que en los dos últimos trimestres de 2003, la volatilidad de las series del IBEX y el EURO STOXX sufre un cambio importante, la economía mundial se recuperara de la crisis de las *puntocom*, iniciándose un periodo alcista de volatilidad históricamente muy bajo¹, por debajo del 10% (ver Figura 5.1). Teniendo en cuenta lo anterior, se observa que si en los periodos mencionados se cambia la ventana de estimación por una ventana más corta, de 3 o 9 meses, se mejora la capacidad de predicción aumentando el rendimiento del modelo. Para el IBEX se obtienen rendimientos de hasta un 30% para MSE, y de en torno al 15% para QLIKE, utilizando en ambos, la *rv* como *proxy*. En el caso del EURO STOXX la mejora se reduce al último trimestre de 2003 y solo cuando se utiliza la volatilidad realizada. Este comportamiento se asocia a la reducción de la memoria del modelo, es decir, se consigue que la mayor parte de la información utilizada para predecir sea la relativa al nuevo nivel de volatilidad.

Por último, el aumento de la frecuencia de reestimación de los parámetros no mejora el rendimiento para las series del IBEX y el EURO STOXX. Solo se obtienen mejoras cuando la reestimación es diaria y el *proxy* es la volatilidad realizada, aunque la mayoría por debajo del 1%. Para la serie del BBVA, una reestimación mensual consigue aumentos del rendimiento de hasta un 4% cuando se utilizan los retornos al cuadrado como *proxy* y de hasta un 24% cuando se compara con *rv*.

¹ En España este periodo coincidió con la creación de la burbuja inmobiliaria producida, entre otros motivos por: el ingreso en el Euro, los tipos de interés bajos y la emancipación de la generación más numerosa que había tenido España.

El objetivo que se persigue es buscar la estrategia que mejor funcione para todos los periodos. Por tanto, cuando se comparen estos modelos con otros, se debería utilizar una reestimación mensual de los parámetros para la serie del BBVA, y la estrategia principal para el IBEX y el EURO STOXX.

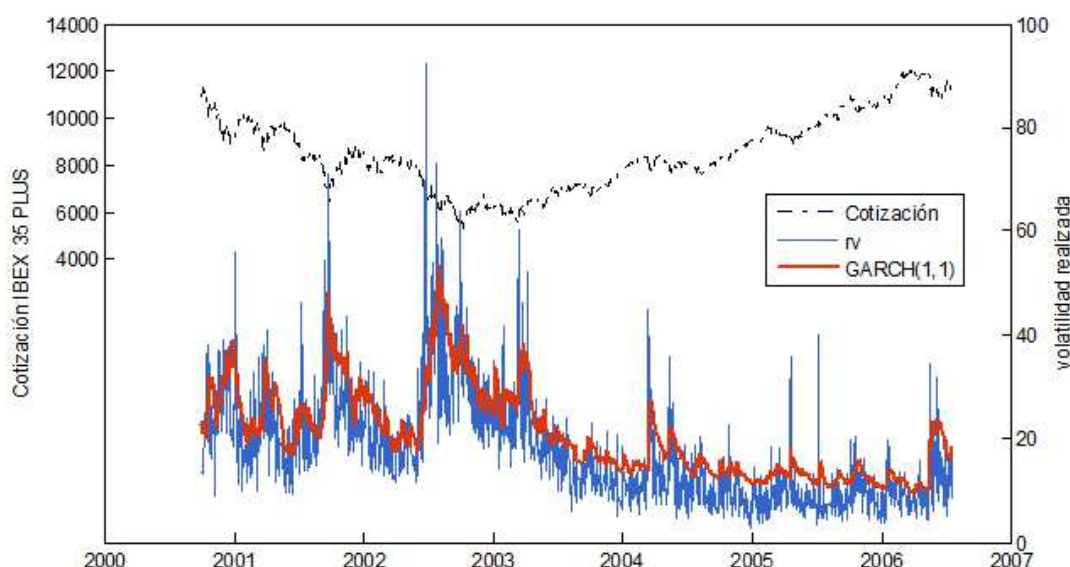


Figura 5.1. Cotización, volatilidad realizada y predicción de la volatilidad GARCH(1,1) para 1 día en adelante del IBEX 35 PLUS.

5.2.1.2 Análisis de las series Americanas

Los resultados para el conjunto de series del NASDAQ y NSYE se muestran en las Tablas 9 y 10. Las series de los índices: AMZN, BAC, GOOG, GS, IBM, JCP, MRK y MSFT obtienen mejor capacidad predictiva si se adopta una estrategia de estimación diferente. Para el resto de las series: AAPL, PCLN, WAG y YHOO, no se ha observado que se mejore el rendimiento sustancialmente.

Los índices que obtienen mejor rendimiento con una distribución t-Student son: AMZN, GOOG, IBM y MRK. Por otro lado, si se modifican las ventanas para las series BAC y JCP, se obtiene mejor rendimiento con una ventana de 3 meses y se consiguen mejoras por encima del 5%. En el caso de la serie JCP se llegan a rendimientos por encima del 20% para los errores MSE.

5.2 EXPERIMENTOS CON MODELOS GARCH

La estrategia principal de las cotizaciones de IBM y GOOG mejora tanto si se utiliza una ventana de 3 meses como una de 9 meses. Para IBM se observan mejoras del 20% para (QLIKE/ rv), y del 30% para (MSE/ rv). Si tiene en cuenta el *proxy* r^2 el rendimiento también aumenta de forma significativa. Para serie GOOG el comportamiento es similar, con mejoras considerablemente mayores si se emplea rv como *proxy*.

El cambio en la frecuencia de reestimación de los parámetros produce un aumento de rendimiento para las series BAC y GOOG si se reestima mensualmente, y para la serie IBM si no se vuelven a calcular los parámetros. En los demás casos el rendimiento empeora o no mejora significativamente.

Con estos datos, se ha realizado un análisis más profundo para las series AMZN, BAC, GOOG, GS, IBM, JCP, MRK y MSFT¹, ya que existen diferentes posibilidades para cada una de ellas. En el Apéndice C se muestran las diferentes estrategias que se han calculado y los resultados obtenidos. En la Tabla 1 se resumen las modificaciones que tienen mejor rendimiento para cada una de las series analizadas.

Tabla 1. Modificaciones de la estrategia principal de las series AMZN, BAC, GOOG, GS, IBM, JCP, MRK y MSFT. Aumentos de rendimiento del error QLIKE respecto a la estrategia principal. El *proxy* utilizado es la volatilidad realizada. Entre paréntesis se muestra el resultado de los test DMW.

	t-Student	3 meses	9 meses	Sin reestimación	Rendimiento de la estrategia
AMZN	✓	✓			13.6222% (> 10%)
BAC	✓	✓			11.7919% (< 1%)
GOOG ¹	✓	✓			33.8891% (< 1%)
GS			✓		1.2321% (>10%)
IBM			✓	✓	23.3575% (< 5%)
JCP		✓			15.4856% (> 10%)
MRK	✓				3.2378% (> 10%)
MSFT			✓		7.5585% (<1%)

¹ Existen dos estrategias de estimación con el mismo rendimiento para la serie GOOG: t-Student con una ventana de 3 meses, y t-Student con una reestimación mensual de los parámetros. Se ha elegido la primera como la estrategia óptima porque tiene mejor resultados en los test DMW (ver Tabla 25).

Hay que destacar el buen resultado de los test DMW para las series GOOG e IBM, ya que las cuatro modificaciones logran resultados con bajo nivel de significancia. Por debajo del 1% de significancia para GOOG y del 5% para JCP.

5.2.2 Comparación de modelos

Los experimentos anteriores se han centrado únicamente en el modelo GARCH. En este apartado se comparan directamente los modelos GARCH(1,1), TGARCH(1,1), EGARCH(1,1), AGARCH(1,1), APARCH(1,1), HIS a 60 días y RiskMetrics. Los experimentos se han realizado para las mismas series y se utiliza la estrategia principal para calcular los parámetros en caso de que sea necesario.

En las Tablas 11 a 14 (ver Apéndice A) se pueden observar los errores de predicción NQLIKE y NMSE. En negrita se ha destacado los modelos que ofrecen mejor rendimiento para cada tipo de error y *proxy*. Del mismo modo que en la comparación de estrategias del apartado anterior, se muestra la significancia estadística como resultado de la realización de test de DMW respecto a GARCH, y así comprobar si existen diferencias estadísticamente significativas entre el modelo GARCH y el resto de modelos.

5.2.2.1 Análisis de las series europeas

En principio se podría suponer que la utilización de un modelo asimétrico, es decir, un modelo que trate los rendimientos r_t positivos de forma distinta que los negativos, tiene mejor capacidad predictiva. Pero los resultados obtenidos no indican que se mejore el modelo GARCH(1,1) por el hecho de utilizar uno de los modelos asimétricos que se han estudiado.

Los modelos AGARCH y APARCH y la volatilidad histórica a 60 días (HIS) ofrecen un rendimiento pobre para la mayoría de los periodos, sin superar al modelo GARCH. En cambio, los modelos TGARCH y EGARCH mejoran el rendimiento del modelo GARCH. A continuación, vamos a analizar en detalle el comportamiento de los modelos para las series europeas.

Los resultados de las series del IBEX y el EURO STOXX son muy parecidos, obteniendo la misma clasificación cuando se ordenan los modelos en función de su rendimiento. Además, los resultados son consistentes porque, aunque exista alguna discrepancia, la clasificación de los modelos se mantiene independientemente del *proxy* o la función de error elegida.

5.2 EXPERIMENTOS CON MODELOS GARCH

En las Tablas 11 y 12 se puede apreciar que los modelos EGARCH y TGARCH ofrecen el mejor rendimiento respecto al resto sin poder apreciar diferencias importantes entre ellos. Superan al modelo GARCH para la mayoría de periodos, y obtienen significancias menores del 10% en los test de DMW. Por otro lado, RiskMetrics ofrece un resultado ligeramente superior al modelo GARCH, pero no se puede asegurar cuál de los dos modelos tiene mayor capacidad de predicción. Ambos superan a HIS, AGARCH y APARCH que cierran la clasificación en este mismo orden.

El rendimiento de los modelos para las series del BBVA también siguen el orden de las series anteriores pero en este caso la clasificación varía dependiendo del *proxy* utilizado. Cuando se emplean los rendimientos al cuadrado la clasificación es igual que en las series anteriores, EGARCH y TGARCH tienen mejor rendimiento que el resto, seguidos de RiskMetrics y GARCH. En cambio, cuando se utiliza la volatilidad realizada la clasificación se desvirtúa, ya que el modelo GARCH obtiene un rendimiento similar a TGARCH, superando ambos al modelo EGARCH, que se queda al nivel de RiskMetrics. En cualquier caso, el rendimiento para HIS, AGARCH y APARCH no varía, siendo estos modelos inferiores al resto. Es importante destacar que el modelo EGARCH no converge para todos los periodos de la serie, lo que puede influir en los resultados de la serie del BBVA.

5.2.2.2 Análisis de las series Americanas

En este caso la clasificación de los modelos se realiza a partir de los resultados de la Tabla 14, siguiendo un orden muy distinto al de las series europeas, aunque en el análisis se va a observar que los resultados son coherentes ya que no existen discrepancias importantes por el tipo de la función de error o el *proxy* elegido.

Los modelos RiskMetrics y HIS tienen claramente mayor capacidad predictiva que el resto, además obtienen mejores resultados en los test de DMW. Sin embargo, no hay suficientes evidencias para decidir qué modelo de los dos es el mejor, ya que RiskMetrics supera a HIS cuando se utiliza la volatilidad realizada como *proxy* y, en cambio, cuando se emplea r^2 es HIS el que supera a RiskMetrics.

El modelo TGARCH supera a GARCH, sin embargo, estos modelos tienen una capacidad predictiva similar si se los compara con el resto de modelos. Su rendimiento es peor que los modelos anteriores.

A diferencia que las series anteriores el modelo EGARCH tiene un rendimiento muy pobre. Se puede observar que el modelo EGARCH no converge para la serie IBM pero este hecho no evita que esté al mismo nivel que AGARCH y APARCH. Estos modelos, al igual que el caso anterior, tienen la peor capacidad de predicción.

5.3 Experimentos con modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH

En el apartado anterior se han presentado los resultados de los modelos clásicos, RiskMetrics y la volatilidad histórica (HIS). En este apartado se analizan los resultados de los modelos LMS-GARCH(1,1) y RLS-GARCH(1,1), que usan los algoritmos adaptivos LMS y RLS para calcular los parámetros del modelo. De este modo, el periodo de entrenamiento deja de tener la función de los modelos anteriores, ya que los parámetros no se estiman por máxima verosimilitud, si no que se calculan después de cada periodo con un filtro adaptativo. Además, estos dos modelos, a diferencia de los anteriores, nos van a permitir utilizar datos intradía cuando se utilice la volatilidad realizada como señal deseada. Como en los experimentos anteriores, se han utilizado series intradía de 30 minutos para el cálculo de la volatilidad realizada.

La nomenclatura de los modelos que analizaremos en este apartado es la siguiente:

- LMS-GARCH-R2(1,1): implementa un filtro adaptativo LMS, minimizando una función de coste MSE y utilizando como señal deseada la serie r_t^2 .
- LMS-GARCH-RV(1,1): igual que el anterior pero utiliza la volatilidad realizada rv como señal deseada.
- RLS-GARCH-R2(1,1): implementa un filtro adaptativo RLS, minimizando una función de coste ponderada y utilizando como señal deseada la serie r_t^2 .
- RLS-GARCH-RV: igual que el anterior pero utiliza la volatilidad realizada rv como señal deseada.

También cabe destacar que aunque las series que se utilizan son siempre r^2 y rv , es importante diferenciar la señal deseada del *proxy*. La señal deseada se emplea para calcular la señal de error en el proceso de filtrado adaptativo, en cambio, el *proxy* es utilizado por una función de error cuando se evalúan las predicciones.

5.3 EXPERIMENTOS CON MODELOS LMS-GARCH Y RLS-GARCH

En la Tabla 2 se muestran los parámetros que utilizan los algoritmos LMS y RLS de los modelos anteriores. Se han optimizado los valores para conseguir el mejor rendimiento para cada serie o para el conjunto de las series americanas. En el caso de los modelos que utilizan LMS el parámetro optimizado es la velocidad de convergencia o aprendizaje μ . Este valor debería ser más pequeño para el algoritmo LMS-GARCH-R2 porque r_t^2 es una señal más ruidosa que la rv . Por otro lado, los modelos que utilizan el algoritmo RLS el parámetro optimizado es λ , este parámetro está asociado con la memoria del filtro, es decir, con la importancia de las muestras anteriores. En este caso, el algoritmo RLS-GARCH-R2 debería tener un parámetro λ mayor que la versión con rv , porque para una señal más ruidosa se necesitan más muestras que para otra menos ruidosa.

Tabla 2. Parámetros optimizados de los filtros adaptativos que utilizan los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH.

	LMS-GARCH-R2	LMS-GARCH-RV	RLS-GARCH-R2	RLS-GARCH-RV
IBEX 35	$\mu = 0.12$	$\mu = 0.21$	$\lambda = 0.99$	$\lambda = 0.96$
DJ EURO STOXX 50	$\mu = 0.12$	$\mu = 0.21$	$\lambda = 0.99$	$\lambda = 0.96$
BBVA	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.12$	$\lambda = 0.99$	$\lambda = 0.98$
Series americanas	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.05$	$\lambda = 0.99$	$\lambda = 0.99$

5.3.1 Análisis de las series europeas

Los resultados indican que el modelo LMS-GARCH-RV es el mejor modelo para las tres series del conjunto. No obstante, la ventaja de este modelo respecto al resto no es tan clara para la serie BBVA.

Los resultados obtenidos para las series IBEX y EURO STOXX (ver Tablas 15 y 16 del Apéndice B) permiten ordenar los modelos de mayor a menor rendimiento, según la siguiente clasificación: LMS-GARCH-RV, RLS-GARCH-RV, LMS-GARCH-R2, GARCH y RLS-GARCH-R2. Esta clasificación se mantiene en los cuatro análisis utilizados para evaluar las predicciones, es decir, el orden es el mismo aunque se cambie la función de error (QLIKE o MSE), o se utilice un *proxy* distinto (r^2 o rv) para comparar los resultados. Para estas dos series LMS-GARCH-RV mejora al resto de modelos en los cuatro análisis, incluso obtiene el mejor resultado en la mayoría de trimestres.

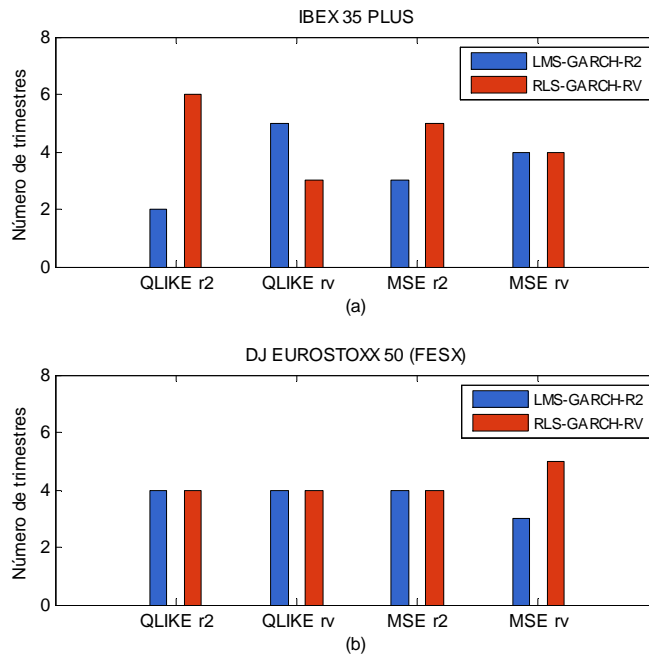


Figura 5.2. Comparación del modelo LMS-GARCH-R2 y RLS-GARCH-RV para (a) IBEX 35 y (b) EURO STOXX. Se muestran el número de trimestres en los que cada modelo vence para cada dupla error-*proxy*.

Por otro lado, los modelos LMS-GARCH-R2 y RLS-GARCH-RV presentan un rendimiento similar. En la Figura 5.2 se muestra el número de periodos *ganadores* agrupados por tipo de error y *proxy* para cada modelo, es decir, cada barra muestra el número de periodos en los un modelo tiene menor error y resulta *ganador*. Cada par de barras debe ser igual al número de periodos de la serie. En este caso las series se evalúan para ocho trimestres, por eso siempre suman ocho.

La figura anterior muestra una ligera ventaja del RLS-GARCH-RV en los dos diagramas. En el caso del EURO STOXX este modelo solo supera a LMS-GARCH-R2 en uno de los cuatro análisis (MSE-*rv*), y en dos análisis para IBEX que también se ve superado para QLIKE con *rv* como *proxy*. Por tanto, no hay suficiente evidencia para asegurar cuál de estos dos modelos tiene mejor capacidad predictiva.

Los tres modelos que se han analizado hasta ahora, superan al modelo GARCH en la mayoría de periodos. En cambio, este no es el caso del modelo RLS-GARCH-R2 que obtiene un rendimiento muy pobre, alejado de GARCH y del resto de modelos.

5.3 EXPERIMENTOS CON MODELOS LMS-GARCH Y RLS-GARCH

Los resultados de los test de DMW para el IBEX y el EURO STOXX favorecen a LMS-GARCH-RV, obteniendo significancias por debajo del 10% en más periodos que el resto de modelos. También es interesante tener en cuenta la magnitud de los errores, para ambas series los errores del modelo LMS-GARCH-RV son menores que uno en la mayoría de periodos, lo que sugiere de nuevo que este modelo posee mejor capacidad de predicción que el resto.

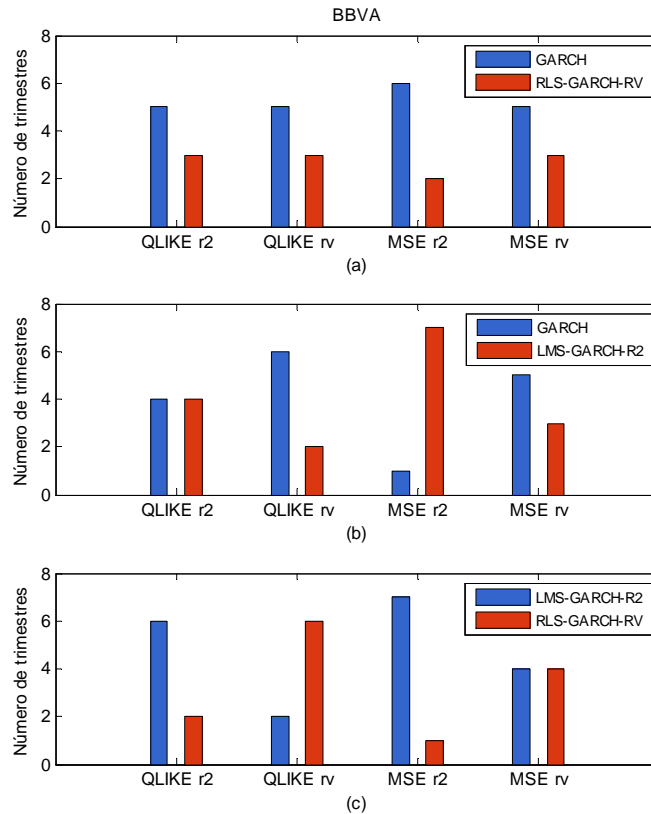


Figura 5.3. Comparación de modelos para la serie BBVA: (a) GARCH y RLS-GARCH-RV, (b) GARCH y LMS-GARCH-R2 y (c) LMS-GARCH-R2 y RLS-GARCH-RV. Se muestran el número de trimestres en los que cada modelo vence para cada dupla *error-proxy*.

Para la serie BBVA el modelo LMS-GARCH-RV también presenta cierta ventaja respecto al resto. Si clasificamos los modelos de la misma forma que las series anteriores y se analizan los resultados de la Tabla 17 (ver Apéndice B), se puede observar una clasificación análoga a las anteriores. La primera posición y la última son claramente para el modelo LMS-GARCH-RV y

RLS-GARCH-R2 respectivamente. Sin embargo, es más complicado diferenciar la capacidad predictiva de los modelos GARCH, LMS-GARCH-R2 y RLS-GARCH-RV, ya que ofrecen un rendimiento similar.

En Figura 5.3 y Figura 5.4 se han realizado varias comparaciones del rendimiento de los modelos, obteniendo los modelos *ganadores* para cada uno de los cuatro análisis (*error-proxy*). En la Figura 5.3 se comparan los tres modelos que tienen un rendimiento parecido. Si se observan los diagramas (a) y (c) de dicha figura se puede determinar que el modelo RLS-GARCH-RV no supera al modelo GARCH ni al LMS-GARCH-R2. Aunque en la comparación del diagrama (c), no se puede decidir que método es mejor cuando se emplea la volatilidad realizada. Por otro lado, la comparación del diagrama (b) indica que GARCH ofrece mejor rendimiento que LMS-GARCH-R2, aunque existen discrepancias cuando el *proxy* utilizado son los retornos al cuadrado.

En la Figura 5.4 se puede comprobar que los resultados de LMS-GARCH-RV indican que el modelo ofrece mejor capacidad predictiva que el resto. Aunque el modelo empata en varios análisis e incluso es superado en uno de ellos.

La mayoría de los test de DMW de los modelos respecto al modelo GARCH no obtienen una significancia menor al 10%. Esto prueba que los resultados obtenidos no son estadísticamente significativos. Además, si se examina la magnitud de los errores de la Tabla 17 se puede verificar que la mayoría de los errores son mayores que uno. Esto indica que ninguno de los modelos obtiene buenos resultados, LMS-GARCH-RV inclusive.

Por tanto, los resultados obtenidos para la serie BBVA indican que LMS-GARCH-RV es superior a los demás y que el modelo RLS-GARCH-R2 debe ser descartado por su bajo rendimiento. En cambio, los resultados del resto de modelos no apuntan hacia a una clasificación clara. No obstante, se puede advertir que GARCH es el modelo que ofrece mejor rendimiento de los tres, siendo una buena alternativa a LMS-GARCH-RV.

5.3 EXPERIMENTOS CON MODELOS LMS-GARCH Y RLS-GARCH

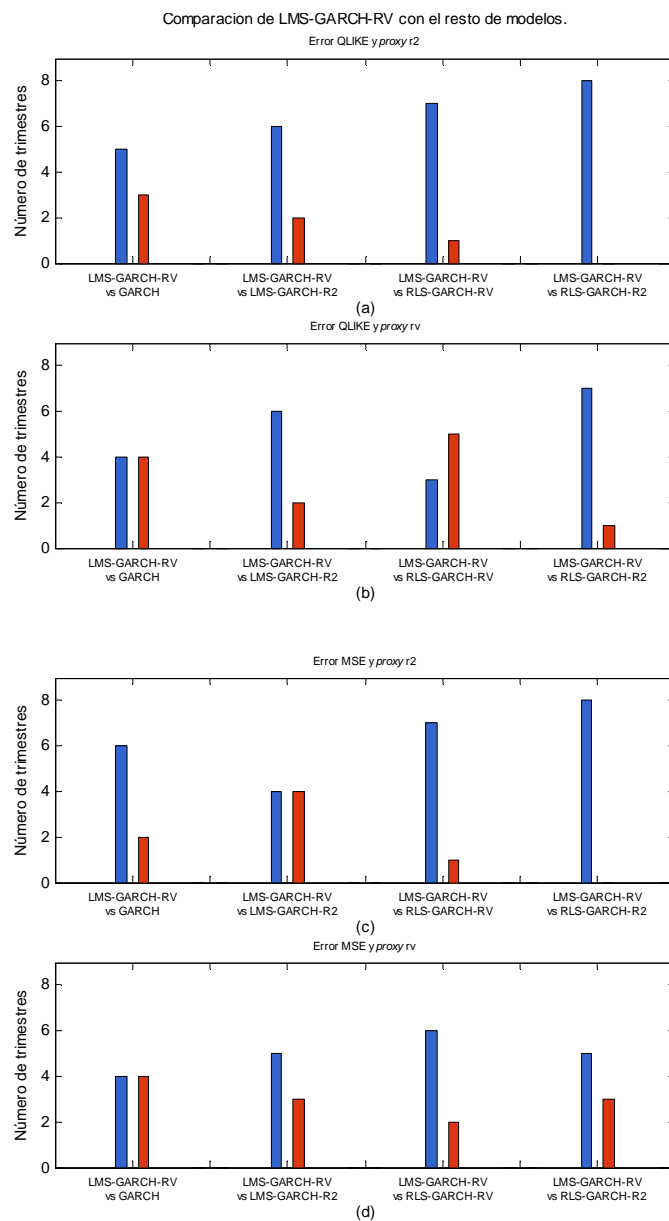


Figura 5.4. Comparación del modelo LMS-GARCH-RV (azul) con el resto de modelos para la serie BBVA. Se consideran los errores y *proxies*: (a) QLIKE-r2, (b) QLIKE-rv, (c) MSE-r2 y (d) MSE-rv.

5.3.2 Análisis de las series americanas

En este apartado se comparan los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH del apartado anterior para los doce valores de las bolsas americanas.

En la Tabla 18 (ver Apéndice B) se muestran los errores obtenidos para los cuatro criterios utilizados en función del tipo de error y *proxy*. La Figura 5.5 que se ha elaborado a partir de la tabla anterior, compara LMS-GARCH-RV frente al resto de modelos. En cada diagrama se muestra el número de periodos en los que cada modelo tiene mejor rendimiento, recordando que en este caso tenemos doce periodos que se corresponden con cada uno de los distintos valores bursátiles, y por eso cada grupo de barras suma doce.

Los resultados muestran que los modelos basados en el algoritmo LMS obtienen mejor capacidad predictiva que el resto. Sin embargo no se puede diferenciar cuál de los dos modelos es mejor. La Figura 5.5 compara el rendimiento de LMS-GARCH-RV respecto al resto de modelos, y se puede comprobar que supera claramente a todos menos a LMS-GARCH-R2. Si se compara el diagrama (a) con el (c) y el (b) con el (c) se puede observar que el comportamiento de los modelos al variar la función de error no cambia. Por el contrario, el orden es diferente si los errores se calculan con *proxies* distintos. Cuando se utiliza r^2 el modelo LMS-GARCH-RV posee mayor rendimiento que el resto. En cambio, si se observa la figura anterior para la volatilidad realizada, y se analizan los resultados de la Tabla 18, se puede concluir que el modelo LMS-GARCH-R2 es ligeramente superior a LMS-GARCH-RV.

El comportamiento que acabamos de describir es exactamente idéntico para LMS-GARCH-R2, es decir, ofrece un rendimiento muy parecido a LMS-GARCH-RV y supera al resto. Si se realizará la misma comparación de la Figura 5.5 para el LMS-GARCH-R2 los gráficos serían análogos.

Los test de DMW también sugieren que los modelos basados en LMS aventajan a los basados en RLS. En la Tabla 18 se puede apreciar que para los modelos basados en LMS, existen mayor número de periodos que mejoran el modelo GARCH con significancias inferiores al 10% e incluso inferiores al 1%.

En resumen, los modelos basados en LMS superan al resto. Mientras que de los modelos basados en el algoritmo RLS, solo RLS-GARCH-RV consigue superar a GARCH. Cabe destacar que no hay ningún modelo que destaque por su buena capacidad predictiva, ya que todos los modelos obtienen errores demasiados altos, es decir, presentan valores por encima de uno.

5.3 EXPERIMENTOS CON MODELOS LMS-GARCH Y RLS-GARCH

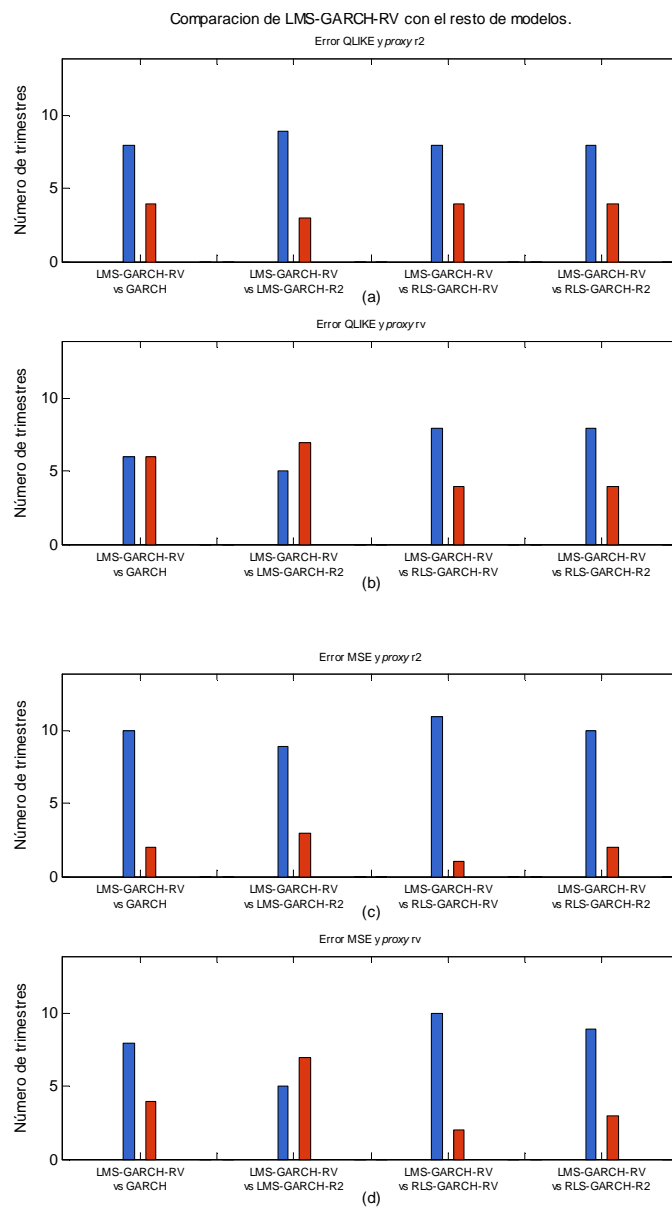


Figura 5.5. Comparación del modelo LMS-GARCH-RV (azul) con el resto de modelos para el conjunto de series americanas. Se consideran los errores y *proxies*: (a) QLIKE-r2, (b) QLIKE-rv, (c) MSE-r2 y (d) MSE-rv.

5.3.3 Comportamiento de los modelos LMS-GARCH-RV y RLS-GARCH-RV con series intradía a diferentes frecuencias

En los apartados anteriores se han calculado los modelos LMS-GARCH-RV y RLS-GARCH-RV que utilizan la volatilidad realizada para competir con el modelo GARCH. Como ya se ha comentado anteriormente, la motivación para introducir la rv en estos modelos se debe a sus características: es un *proxy* insesgado y menos ruidoso que los rendimientos al cuadrado. Además, la rv podría llegar a ser un estimador perfecto en una situación ideal, es decir, si se obtuviera a partir de una serie de rendimientos observados en tiempo continuo y sin errores de medida (Merton, 1980) y (Patton, 2009).

Teniendo esto en cuenta, podríamos pensar que aumentando la frecuencia de las series intradía se obtendrían mejores resultados. Sin embargo, si se aumenta demasiado la frecuencia de las series de retornos, aparece un sesgo en la volatilidad realizada que crece según aumenta dicha frecuencia. Este problema que presenta la rv se debe al ruido de microestructura de mercado¹. Por este motivo, normalmente la rv se calcula con series intradía de entre 5 y 30 minutos (Hansen & Lunde, 2005a).

En este subapartado vamos a modificar la frecuencia de las series intradía con las que se calcula la volatilidad realizada y, de este modo, estudiar el comportamiento de los modelos LMS-GARCH-RV y RLS-GARCH-RV.

En las Tablas 19 a 22 (ver Apéndice B) se muestran los resultados obtenidos para la serie BBVA y el conjunto de series americanas. Las tablas incluyen los modelos empleados anteriormente: GARCH(1,1) utilizando la estrategia principal y los modelos LMS-GARCH-RV y RLS-GARCH-RV con una rv que utiliza series de retornos de 30 minutos. Además, se han realizado tres experimentos nuevos para cada modelo utilizando volatilidades realizadas de 15, 5 y 2 minutos².

¹ La microestructura de mercado estudia los factores que intervienen en la formación de precios, y de qué forma los mecanismos de la negociación influyen en la incorporación de la nueva información a los precios.

² Este análisis no se ha podido realizar para las series del IBEX 35 y el EURO STOXX porque únicamente se dispone de series intradía de 30 minutos.

5.3 EXPERIMENTOS CON MODELOS LMS-GARCH Y RLS-GARCH

Los resultados obtenidos para el modelo LMS-GARCH-RV indican que el modelo que emplea series de 15 minutos para calcular la rv es la mejor opción, en cambio, el peor es el que utiliza series de 2 minutos.

Para la serie BBVA los modelos con una rv de 5 y 2 minutos no superan el modelo de 30 minutos. En cuanto a la capacidad predictiva, todos los modelos LMS-GARCH-RV superan a GARCH, excepto el modelo de rv de 2 minutos

El conjunto de series americanas ofrece resultados muy parecidos a los de la serie BBVA. El mejor modelo es el que emplea una rv de 15 minutos. Los modelos con una rv de 30 y 5 minutos ofrecen un rendimiento similar, seguidos por el modelo con una rv de 2 minutos. En este caso todos los modelos LMS-GARCH-RV superan el modelo GARCH.

Por otro lado, si observamos los modelos RLS-GARCH-RV se puede apreciar que el mejor modelo es el que utiliza series de 30 minutos, ningún otro modelo con volatilidades realizadas de mayor frecuencia lo supera. Para el conjunto de series americanas los modelos con volatilidades de 15 y 5 minutos tienen un rendimiento similar. El modelo con una rv de 2 minutos tiene peor capacidad predictiva que el resto de modelos RLS-GARCH-RV, sin embargo, todos superan a GARCH.

En el caso de la serie BBVA todos los modelos tienen una capacidad predictiva muy inferior a GARCH, y ninguno de los modelos RLS-GARCH-RV supera al que utiliza una rv de 30 minutos. Por ese motivo ha sido necesario calcular los modelos que utilizan una rv de 1, 2 y 4 horas, y se ha podido comprobar que estos modelos también son inferiores al modelo de 30 minutos. En la Figura 5.6 se muestra el número de trimestres ganadores respecto al modelo GARCH, observando que únicamente el modelo con una rv de 15 minutos puede competir con el de 30 minutos.

Como acabamos de comentar, la capacidad predictiva de RLS-GARCH-RV es inferior a GARCH, ya que el resto de modelos solo lo supera como mucho en tres de los ocho trimestres de los que se compone la serie BBVA.

Por tanto, se ha observado la aparición de efectos de microestructura de mercado que empeora el rendimiento del modelo LMS-GARCH-RV si se utiliza una volatilidad realizada menor de 15 minutos. Del mismo modo, el uso de una volatilidad realizada menor de 30 minutos no mejora el rendimiento en el caso del modelo RLS-GARCH-RV.

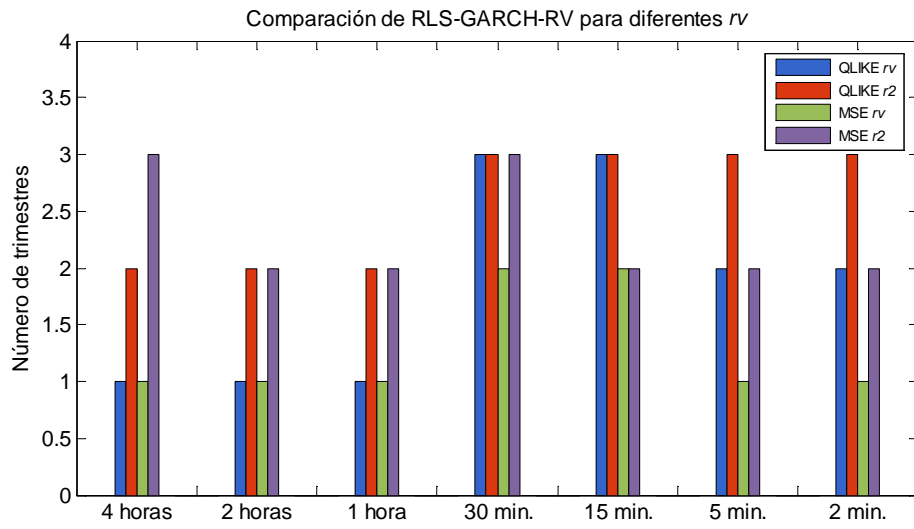


Figura 5.6. Comparación del modelo RLS-GARCH-RV para diferentes rv de la serie BBVA. Se muestran los trimestres ganadores respecto al modelo GARCH para los diferentes errores y *proxies*.

Capítulo 6

Conclusiones

Este último capítulo incluye las conclusiones del Proyecto Fin de Carrera. Además, se presentan varias líneas futuras que se pueden realizar a partir del trabajo realizado y que se consideran prometedoras.

6.1 Conclusiones

Este Proyecto Fin de Carrera se ha centrado en estudiar la volatilidad de los futuros del IBEX 35 PLUS y el DJ EURO STOXX 50, la cotización del BBVA y de un conjunto de valores del NASDAQ y el NYSE.

Se ha realizado un análisis de la volatilidad de las series utilizando los principales modelos de la familia GARCH. Con el objetivo de determinar los modelos con mejor capacidad predictiva, e identificar qué estrategia es la más adecuada para la estimación de los parámetros. Para ello, se ha modificado la longitud de la ventana de entrenamiento, la distribución de las innovaciones y la frecuencia de reestimación de los parámetros.

Una vez realizado el análisis con los modelos clásicos, se ha estudiado la volatilidad de las series con los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH. Estos modelos están basados en los algoritmos adaptativos LMS y RLS, y permiten calcular los parámetros del modelo GARCH de forma *online*, evitando la estimación por máxima verosimilitud. De esta forma, se elimina la necesidad de reestimar los parámetros cada cierto tiempo, y además permite la incorporación de información intradía a los modelos. Estos modelos han sido publicados en (Lázaro Gredilla et al., 2006).

La evaluación de las predicciones no es un proceso sencillo, ya que la volatilidad es una variable no observable y su valor real es desconocido. En este proyecto se ha aplicado la metodología que ha surgido de las contribuciones de (Hansen & Lunde, 2006) y (Patton, 2009), De este modo, se han empleado dos funciones de error: MSE y QLIKE, y dos *proxies*: la

volatilidad realizada y los retornos al cuadrado. Esto permite que las predicciones se evalúen con cuatro criterios distintos, permitiendo la creación de *rankings* de modelos que teóricamente se mantienen inalterados independientemente del *proxy* utilizado. En la práctica estos *rankings* pueden presentar discrepancias, por lo que se han empleado test DMW para comprobar la significancia estadística de las predicciones.

A continuación, se presentan las conclusiones de los experimentos realizados a lo largo del Capítulo 5. Primero se han estudiado diferentes estrategias de estimación de los parámetros para el modelo GARCH(1,1). Para las series europeas IBEX y el EURO STOXX ninguna modificación ha mejorado al modelo que usa la estrategia principal. Por el contrario, para la serie BBVA el rendimiento mejora si los parámetros se estiman mensualmente. Para las tres series se ha podido observar que el rendimiento mejora conforme la ventana de entrenamiento aumenta.

En el conjunto de series americanas, los modelos de los valores AMZN, BAC, GOOG, GS, IBM, JCP, MRK y MSFT mejoran su capacidad predictiva si se aplica una estrategia de estimación alternativa. Como en este caso el conjunto de series está formado por valores muy diferentes, existen múltiples modificaciones que mejoran el rendimiento. Según los resultados la utilización de una ventana de entrenamiento de 3 meses, de 9 meses y la t-Student como distribución de las innovaciones mejoran el rendimiento del modelo que usa la estrategia principal.

El análisis de los modelos clásicos concluye con la comparación directa de varios modelos de la familia GARCH y otros dos modelos, RiskMetrics y HIS, que también gozan de popularidad en el sector financiero. En los dos conjuntos de series se ha comprobado que existen modelos asimétricos con peor capacidad predictiva que GARCH. En un principio esta característica podía ser una ventaja, sin embargo, los modelos asimétricos AGARCH y APARCH han resultado ser los peores. Para las series IBEX y EURO STOXX los modelos asimétricos TGARCH y EGARCH son los que mejor se han comportado. No es así, en el caso de la serie BBVA en el solo el modelo TGARCH parece comportarse adecuadamente.

En cambio, el comportamiento de los modelos para las series americanas ha resultado ser diferente al de las series europeas. Aunque el modelo TGARCH ha superado a GARCH, el modelo RiskMetrics y HIS superaron al resto.

6.2 LÍNEAS FUTURAS

Posteriormente se han analizado los experimentos realizados con los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH, calculando dos versiones para cada uno de ellos. Una versión que utiliza los retornos al cuadrado y otra que incorpora información intradía mediante la volatilidad realizada. Para las tres series europeas el modelo LMS-GARCH-RV ha superado al resto de modelos. Por otro lado, cabe destacar el buen comportamiento de los modelos LMS-GARCH-R2 y RLS-GARCH-RV frente a GARCH para las series de IBEX y el EURO STOXX. Los resultados para el conjunto de las series americanas no son tan claros como en el caso anterior, ya que no se ha podido seleccionar un modelo ganador. La capacidad predictiva de los modelos LMS-GARCH-RV y LMS-GARCH-R2 es superior a la de los demás, pero no se han conseguido apreciar suficientes diferencias en el rendimiento de ambos modelos.

El modelo LMS-GARCH-RV ha conseguido obtener un buen rendimiento a lo largo de los experimentos realizados. Incluso sigue manteniendo su buen comportamiento cuando se utiliza GARCH con reestimación mensual para la serie BBVA o las estrategias alternativas obtenidas para las series americanas. Si se compara con el resto de modelos clásicos está al nivel de los modelos TGARCH y EGARCH, lo que le convierte en una buena alternativa a tener en cuenta.

Finalmente, se ha estudiado el comportamiento de los modelos LMS-GARCH-RV y RLS-GARCH-RV cuando se varía la frecuencia de la volatilidad realizada. Se ha observado que el modelo LMS-GARCH-RV mejora su rendimiento si se emplea una volatilidad realizada de 15 minutos. Sin embargo, si se aumenta la frecuencia aparecen efectos de microestructura de mercado y la capacidad de predicción se deteriora. En cambio, la volatilidad realizada de 30 minutos es el límite para RLS-GARCH-RV, y el rendimiento del modelo no aumenta si se incrementa la frecuencia de la volatilidad realizada.

6.2 Líneas futuras

Este proyecto ha dejado abiertas algunas líneas de investigación que permiten ampliar el trabajo realizado. Al mismo tiempo, y gracias a la flexibilidad que presentan los modelos basados en algoritmos adaptativos, se han generado nuevas ideas que pueden servir para la realización de nuevos estudios. Se consideran interesantes las siguientes líneas de trabajo:

- Se propone realizar un estudio más profundo utilizando un conjunto más numeroso de series. Este conjunto debería contener activos de diferentes tipos (índices de diferentes

sectores y países, tipos de cambio, bonos, fondos...) y series intradía suficientemente largas que permitan emplear volatilidades realizadas en periodos largos de tiempo.

- Estudiar la capacidad predictiva de los modelos para horizontes superiores a un día. Se propone observar el comportamiento de los modelos hasta un horizonte mensual para analizar los efectos de reversión a la media y colas pesadas.
- Estudiar los modelos LMS-GARCH(p, q) y RLS-GARCH(p, q) que tienen en cuenta la varianza y los retornos de los p y q instantes anteriores respectivamente. De esta forma, se pueden estudiar la persistencia de la volatilidad en estos modelos sin limitarse únicamente al periodo anterior.
- Implementar métodos basados en los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH que utilicen menciones de Twitter. El número elevado de menciones puede indicar un aumento de la volatilidad en las sesiones siguientes, para ello habría utilizar el *hashtag* financiero. Por ejemplo: \$GOOG o \$AAPL para seguir las opiniones sobre Google y Apple, respectivamente.
- Realizar un estudio en el mercado real de opciones con los métodos LMS-GARCH y RLS-GARCH y comprobar si se puede “vencer al mercado”. Se propone realizar una valoración de un cierto número de opciones, compararlas con su precio de mercado y observar el beneficio obtenido al finalizar su periodo vencimiento. Para calcular el precio de las opciones es necesario introducir las predicciones de la volatilidad en el modelo de Black-Scholes.

Apéndice A

Errores de predicción de los modelos

GARCH

APÉNDICE A. ERRORES DE PREDICCIÓN DE LOS MODELOS GARCH

Tabla 3. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para el futuro del índice IBEX 35 PLUS. La tabla muestra para cada función de error y *proxy* el error de predicción utilizando la estrategia principal, y el porcentaje de mejora o empeoramiento para el resto de estrategias. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses, 9 meses y 21 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun. Error	Proxy	Estrateg. de estimación	2002				2003			
			1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.
QLIKE	r^2	Base	1.0496	1.1689	1.1011	1.6942	1.2853	1.2115	0.9391	1.7896
		t-Student	-0.0099	-0.0113	0.0220	0.0220	0.0313	-0.0308	0.0020	0.0210
		3 meses	-0.7839	-12.3104	-3.5750	1.2534	1.0672	-4.4543	-0.6685	3.1022
		9 meses	-1.5796	-7.4370	0.0150	-0.3590	-0.5813	-4.5041	1.2430	-0.1940
		21 meses	-0.0315	0.1013	-0.0515	-0.1487	0.0408	0.3141	-0.1349	-0.0922
		sin reestimar	-0.0735	0.6797	-0.9665	-0.2865	0.0538	-0.4630	-2.0719	-0.9952
		diario	-0.0160	-0.0491	-0.2168	-0.1771	-0.1498	0.0707	0.2946	-0.4353
		mensual	0.0569	0.2307	-0.3496	-0.0331	0.0188	-0.1619	0.0614	0.0666
QLIKE	rv	Base	0.1617	0.2221	0.1893	0.0933	0.1744	0.1875	0.2470	0.2053
		t-Student	-0.1586	-0.0521	-0.1163	-0.1282	-0.0167	-0.2005	0.0908	0.3271
		3 meses	-25.9466	-22.6988	-40.1214	-39.3040	-9.9787	-10.0624	17.2161	13.2767
		9 meses	-11.4437	-19.6736	-9.8605	-12.5336	-19.4029	-33.5682	20.7888	4.1940
		21 meses	0.6990	-0.3998	0.4243	-2.5670	-1.9522	2.1645	-0.2861	1.1244
		sin reestimar	-0.9739	0.7755	4.8080	-0.8803	1.0448	-6.6262	-23.6975	-13.7942
		diario	0.4449	0.2202	-0.0929	-0.4284	0.2914	0.8109	1.6033	1.2210
		mensual	0.0724	-0.1164	-1.3485	0.3033	0.3089	-3.1655	-5.7409	-3.2649
MSE	r^2	Base	5.62E-08	9.57E-08	8.28E-07	3.23E-07	2.65E-07	7.37E-08	1.51E-08	1.30E-08
		t-Student	-0.0193	-0.0136	0.0127	0.0220	0.0194	-0.1240	0.0065	0.0569
		3 meses	-5.2387	-11.7440	-6.9305	1.4911	0.7473	-13.5105	8.4851	8.0472
		9 meses	-4.0820	-7.4820	-0.3995	-1.9637	-1.3763	-9.6906	5.3977	0.6945
		21 meses	-0.0314	0.1136	-0.0016	-0.4727	0.0328	0.6438	-0.2429	-0.1105
		sin reestimar	-0.1519	0.9151	-0.2983	-0.3195	0.0302	-1.2614	-5.8806	-2.2892
		diario	-0.0073	-0.1285	-0.3839	-0.3826	-0.2320	0.1955	0.5710	-0.4509
		mensual	0.1310	0.1107	-0.2654	-0.0411	0.0231	-0.6737	-0.8890	0.0209
MSE	rv	Base	1.21E-08	1.51E-07	1.69E-07	3.06E-08	4.41E-08	2.38E-08	4.80E-09	2.29E-09
		t-Student	-0.2407	-0.0442	-0.1482	-0.1505	-0.0688	-0.2828	0.0896	0.3076
		3 meses	-71.6268	-2.7055	-68.1576	-53.4709	-8.3935	-16.1870	31.8715	20.1432
		9 meses	-18.6941	-5.4158	-16.8161	-16.6307	-20.6663	-36.6773	31.5434	7.4043
		21 meses	0.8201	0.2134	0.0035	-2.9752	-2.1403	1.7336	-0.5627	0.7116
		sin reestimar	-0.9075	0.3109	9.2102	-0.4369	1.7868	-5.5217	-35.3485	-14.0019
		diario	0.4282	0.0958	-0.0970	-0.5230	0.6950	0.8302	2.4940	1.7741
		mensual	0.2185	-0.0263	-0.6190	0.5001	0.5857	-2.8806	-8.6606	-2.0353

Tabla 4. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para el futuro del índice IBEX 35 PLUS. La tabla muestra para cada función de error y *proxy* el error de predicción de cada modelo. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses, 9 meses y 21 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun. Error	Proxy	Estrategia de estimación	2002				2003			
			1 trim	2 trim	3 trim	4 trim	1 trim	2 trim	3 trim	4 trim
NQLIKE	r^2	Base	1.0065	0.9521	1.0799	1.0302	1.0418	1.0686	1.0775	1.0500
		t-Student	1.0066	0.9522	1.0797	1.0300	1.0415	1.0689	1.0775	1.0498
		3 meses	1.0144	1.0693	1.1185	1.0173	1.0307	1.1162	1.0847	1.0175
		9 meses	1.0224	1.0229	1.0797	1.0339	1.0479	1.1167	1.0641	1.0521
		21 meses	1.0068	0.9511	1.0805	1.0317	1.0414	1.0652	1.0790	1.0510
		sin reestimar	1.0072	0.9456	1.0903	1.0331	1.0413	1.0735	1.0999	1.0605
		diario	1.0066	0.9526	1.0823	1.0320	1.0434	1.0678	1.0744	1.0546
		mensual	1.0059	0.9499	1.0837	1.0305	1.0417	1.0703	1.0769	1.0493
NQLIKE	rv	Base	1.0962	0.5181	1.0942	0.7677	0.9242	1.2096	1.4898	1.1253
		t-Student	1.0980	0.5183	1.0954	0.7687	0.9243	1.2120	1.4885	1.1217
		3 meses	1.3806	0.6357	1.5331	1.0695	1.0164	1.3313	1.2334	0.9759
		9 meses	1.2217	0.6200	1.2020	0.8640	1.1035	1.6156	1.1801	1.0781
		21 meses	1.0886	0.5202	1.0895	0.7875	0.9422	1.1834	1.4941	1.1127
		sin reestimar	1.1069	0.5141	1.0415	0.7745	0.9145	1.2897	1.8429	1.2806
		diario	1.0913	0.5169	1.0952	0.7710	0.9215	1.1998	1.4660	1.1116
		mensual	1.0954	0.5187	1.1089	0.7654	0.9213	1.2479	1.5754	1.1621
NMSE	r^2	Base	1.0320	0.9186	1.0686	1.0696	1.0381	1.2032	1.1899	1.1205
		t-Student	1.0322	0.9187	1.0684	1.0694	1.0379	1.2047	1.1898	1.1198
		3 meses	1.0861	1.0265	1.1426	1.0537	1.0303	1.3657	1.0889	1.0303
		9 meses	1.0741	0.9873	1.0728	1.0906	1.0524	1.3198	1.1257	1.1127
		21 meses	1.0323	0.9176	1.0686	1.0747	1.0378	1.1954	1.1928	1.1217
		sin reestimar	1.0336	0.9102	1.0718	1.0730	1.0378	1.2183	1.2599	1.1461
		diario	1.0321	0.9198	1.0727	1.0737	1.0405	1.2008	1.1831	1.1255
		mensual	1.0306	0.9176	1.0714	1.0701	1.0379	1.2113	1.2005	1.1202
NMSE	rv	Base	1.2417	0.8040	1.1796	0.7830	0.9354	1.2758	2.2682	1.2911
		t-Student	1.2447	0.8044	1.1813	0.7841	0.9360	1.2794	2.2662	1.2871
		3 meses	2.1312	0.8258	1.9835	1.2016	1.0139	1.4823	1.5453	1.0310
		9 meses	1.4739	0.8476	1.3779	0.9132	1.1287	1.7438	1.5527	1.1955
		21 meses	1.2316	0.8023	1.1795	0.8063	0.9554	1.2537	2.2810	1.2819
		sin reestimar	1.2530	0.8015	1.0709	0.7864	0.9187	1.3463	3.0700	1.4719
		diario	1.2364	0.8032	1.1807	0.7871	0.9289	1.2652	2.2116	1.2682
		mensual	1.2390	0.8042	1.1869	0.7790	0.9299	1.3126	2.4646	1.3174

APÉNDICE A. ERRORES DE PREDICCIÓN DE LOS MODELOS GARCH

Tabla 5. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para el futuro del índice DJ EURO STOXX 50. La tabla muestra para cada función de error y *proxy* el error de predicción utilizando la estrategia principal, y el porcentaje de mejora o empeoramiento para el resto de estrategias. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses, 9 meses y 21 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun. Error	Proxy	Estrategia de estimación	2002				2003			
			1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.
QLIKE	r^2	Base	1.2419	1.4620	0.9302	1.4251	1.8533	1.5548	0.9793	1.8929
		t-Student	0.2052	-0.3481	-0.1860	0.1465	-0.0076	-0.0892	-0.0006	0.0035
		3 meses	-2.7613	-8.4960	-11.5876	0.9552	-3.2234	-5.8168	3.2200	-0.8552
		9 meses	-3.0293	-4.3242	2.0587	0.0562	-2.8659	-4.0082	-1.4825	0.5724
		21 meses	-0.1270	0.3857	-0.0085	0.4070	0.1623	0.3907	-0.2411	-0.3464
		sin reestimar	-0.1512	0.6580	-2.0046	0.0183	0.3315	-0.0708	0.0245	-0.2804
		diario	0.0066	0.0282	-0.4346	-0.1567	-0.0231	0.0284	-0.1906	-0.1163
		mensual	-0.1118	0.4380	0.0297	-0.0974	0.1735	-0.0515	-0.3398	-0.2336
QLIKE	rv	Base	0.1600	0.2629	0.1874	0.1213	0.1370	0.1841	0.1363	0.1877
		t-Student	0.4491	-0.8573	-3.5224	1.2208	-0.4227	-3.0804	-0.1995	-0.0702
		3 meses	-27.3409	-55.1104	-20.2120	-19.4049	-41.6137	-36.2492	-1.1534	10.7820
		9 meses	-24.5833	-12.5594	0.0667	-6.4888	-29.3463	-55.6342	-21.5413	7.8306
		21 meses	-0.2261	-1.3793	0.8269	0.3002	-0.6129	1.4481	-0.7512	-0.9881
		sin reestimar	-1.2780	1.1769	-5.1579	1.4008	1.5719	-3.1101	-3.8690	-3.6302
		diario	0.3921	-0.0677	1.2128	-0.9328	0.6003	0.5891	-0.1504	0.2068
		mensual	-0.8498	0.4042	0.2724	0.3554	0.6781	-1.4503	-1.8044	-2.9324
MSE	r^2	Base	4.78E-08	2.55E-07	2.09E-06	8.93E-07	1.39E-06	3.94E-07	4.61E-08	6.82E-08
		t-Student	1.1189	-0.1178	0.4397	0.2893	0.2502	-0.4727	-0.0260	-0.0044
		3 meses	-12.0190	-13.4784	-12.6872	2.2535	-3.3992	-16.9224	4.8071	1.7811
		9 meses	-11.5794	-4.2532	0.6605	-1.1231	-2.1915	-5.7681	-5.8633	2.2537
		21 meses	-0.4699	0.1532	-0.2497	0.0466	-0.2248	0.6083	-0.4515	-0.7007
		sin reestimar	-0.5811	1.4280	0.2756	0.4116	0.7207	-0.4184	-0.4606	-0.0564
		diario	0.0182	0.2856	-0.4297	-0.5182	-0.2999	0.0181	-0.3076	-0.1669
		mensual	-0.3507	1.3110	0.5021	0.1534	0.3269	-0.2306	-0.5761	-0.1477
MSE	rv	Base	1.35E-08	1.85E-07	4.65E-07	1.32E-07	1.27E-07	8.54E-08	8.18E-09	1.08E-08
		t-Student	2.3861	0.5172	-2.1129	2.0186	-0.4301	-4.1560	-0.3069	-0.1571
		3 meses	-53.1446	-28.3742	-35.0753	-12.3165	-55.2269	-45.6088	-3.9185	27.1859
		9 meses	-42.3209	-1.0748	-4.8978	-14.6379	-42.9839	-51.7312	-73.3905	16.6617
		21 meses	-0.7058	-0.0861	-0.1427	-1.5736	-0.7977	1.4149	-1.2750	-2.2624
		sin reestimar	-2.0180	0.9664	2.8900	4.4533	4.9853	-2.9637	-3.7481	0.5318
		diario	0.5224	-0.1108	1.6657	-0.8218	3.3318	0.6963	-0.9599	0.2168
		mensual	-1.0793	0.6466	1.4409	2.7813	2.1670	-1.5212	-1.4045	0.0062

Tabla 6. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para el futuro del índice DJ EURO STOXX 50. La tabla muestra para cada función de error y *proxy* el error de predicción de cada modelo. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses, 9 meses y 21 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun. Error	Proxy	Estrategia de estimación	2002				2003			
			1 trim	2 trim	3 trim	4 trim	1 trim	2 trim	3 trim	4 trim
NQLIKE	r^2	Base	1.0316	0.9476	1.1028	1.0135	1.0109	1.0155	1.0344	1.0079
		t-Student	1.0295	0.9509	1.1049	1.0120	1.0110	1.0165	1.0344	1.0078
		3 meses	1.0601	1.0282	1.2306	1.0038	1.0435	1.0746	1.0011	1.0165
		9 meses	1.0629	0.9886	1.0801	1.0129	1.0399	1.0563	1.0497	1.0021
		21 meses	1.0329	0.9440	1.1029	1.0093	1.0093	1.0116	1.0369	1.0113
		sin reestimar	1.0332	0.9414	1.1249	1.0133	1.0076	1.0163	1.0342	1.0107
		diario	1.0316	0.9474	1.1076	1.0151	1.0112	1.0153	1.0364	1.0090
		mensual	1.0328	0.9435	1.1025	1.0145	1.0092	1.0161	1.0379	1.0102
NQLIKE	r^v	Base	1.4759	0.5683	1.0300	0.8489	0.7116	0.9593	1.1855	1.3422
		t-Student	1.4692	0.5732	1.0663	0.8385	0.7146	0.9889	1.1878	1.3431
		3 meses	1.8794	0.8815	1.2382	1.0136	1.0077	1.3071	1.1991	1.1975
		9 meses	1.8387	0.6397	1.0293	0.9039	0.9204	1.4930	1.4408	1.2371
		21 meses	1.4792	0.5762	1.0215	0.8463	0.7159	0.9454	1.1944	1.3554
		sin reestimar	1.4947	0.5616	1.0831	0.8370	0.7004	0.9891	1.2313	1.3909
		diario	1.4701	0.5687	1.0175	0.8568	0.7073	0.9537	1.1873	1.3394
		mensual	1.4884	0.5660	1.0272	0.8458	0.7068	0.9732	1.2069	1.3815
NMSE	r^2	Base	1.1332	0.9424	1.0789	1.0165	1.0273	1.1015	1.0715	1.0597
		t-Student	1.1206	0.9435	1.0742	1.0135	1.0247	1.1067	1.0718	1.0597
		3 meses	1.2694	1.0694	1.2158	0.9936	1.0622	1.2879	1.0200	1.0408
		9 meses	1.2645	0.9825	1.0718	1.0279	1.0498	1.1650	1.1343	1.0358
		21 meses	1.1386	0.9410	1.0816	1.0160	1.0296	1.0948	1.0763	1.0671
		sin reestimar	1.1398	0.9290	1.0759	1.0123	1.0199	1.1061	1.0764	1.0602
		diario	1.1330	0.9397	1.0836	1.0217	1.0304	1.1013	1.0748	1.0614
		mensual	1.1372	0.9301	1.0735	1.0149	1.0239	1.1040	1.0777	1.0612
NMSE	r^v	Base	2.0031	0.8407	1.0372	0.9365	0.6527	1.0939	1.4601	2.0587
		t-Student	1.9553	0.8364	1.0591	0.9176	0.6555	1.1393	1.4646	2.0619
		3 meses	3.0676	1.0793	1.4010	1.0519	1.0132	1.5928	1.5173	1.4990
		9 meses	2.8508	0.8498	1.0880	1.0736	0.9333	1.6598	2.5316	1.7157
		21 meses	2.0172	0.8415	1.0387	0.9513	0.6579	1.0784	1.4787	2.1053
		sin reestimar	2.0435	0.8326	1.0072	0.8948	0.6202	1.1263	1.5148	2.0477
		diario	1.9926	0.8417	1.0199	0.9442	0.6310	1.0863	1.4741	2.0542
		mensual	2.0247	0.8353	1.0222	0.9105	0.6386	1.1105	1.4806	2.0586

APÉNDICE A. ERRORES DE PREDICCIÓN DE LOS MODELOS GARCH

Tabla 7. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para la serie BBVA. La tabla muestra para cada función de error y *proxy* el error de predicción utilizando la estrategia principal, y el porcentaje de mejora o empeoramiento para el resto de estrategias. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses y 9 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Func. Error	Proxy	Estrategia de estimación	2010 2 trim.	2010 3 trim.	2010 4 trim.	2011 1 trim.	2011 2 trim.	2011 3 trim.	2011 4 trim.	2012 1 trim.
QLIKE	r^2	Base	1.9182	1.6025	1.2962	1.4914	1.6588	1.3961	1.2030	1.6145
		t-Student	-18.813	1.3002	-3.4951	-1.7784	0.5431	1.8471	-0.2380	-0.3878
		3 meses	-5.4442	1.5446	-14.966	-0.1313	-6.2356	7.0241	2.2739	0.4796
		9 meses	-0.2336	-0.7641	-0.0543	0.5559	-0.1787	0.9781	0.0350	-1.7268
		sin reestimar	-63.384	-0.2230	0.6529	1.1221	-0.2828	-2.8950	0.3988	0.1446
		diario	-2.7441	0.0832	-0.2408	0.4950	0.0210	-0.8622	-0.5700	-0.2038
		mensual	-2.9456	0.1681	0.0127	0.7626	-0.3841	-0.3862	0.2390	0.4479
QLIKE	rv	Base	0.3266	0.1893	0.2181	0.1863	0.1613	0.4163	0.1719	0.1051
		t-Student	-32.7767	12.9741	-24.301	15.6118	-2.1423	-3.0246	-1.0898	-1.5856
		3 meses	-36.8989	-38.083	-108.86	-5.6272	-44.485	8.8299	-17.652	-6.1571
		9 meses	-2.0366	6.5616	-3.6999	4.3635	-1.2640	2.6178	-7.7519	-11.687
		sin reestimar	-225.116	0.6992	1.9041	0.2303	-4.8843	-5.8732	0.6056	-2.4362
		diario	-7.0004	-0.3731	0.3768	-0.3520	0.6713	-0.4235	-0.3101	-0.7546
		mensual	-17.0158	-0.2972	-0.1486	7.1350	1.4697	0.0030	-1.7401	1.3893
MSE	r^2	Base	2.77E-05	5.23E-7	6.61E-7	1.66E-6	3.34E-7	2.05E-6	1.99E-6	4.23E-7
		t-Student	0.7034	7.3767	-0.5149	3.3850	2.3911	0.6903	-0.5323	-0.7867
		3 meses	0.7488	-31.078	-7.3796	-19.265	-2.6253	2.2721	1.1001	-0.6832
		9 meses	-0.6279	-1.1844	0.1150	1.5627	-2.4082	0.7517	-1.1617	-4.3415
		sin reestimar	-3.7090	-0.6661	1.2639	4.6683	-0.8577	-0.7610	0.2130	-0.2550
		diario	-6.6771	0.2139	-0.0998	2.0497	-0.0756	-1.0366	-0.2884	-0.1637
		mensual	1.7267	-0.0789	1.0679	4.4377	-0.7412	0.4666	-0.0807	0.4626
MSE	rv	Base	6.17E-06	1.04E-07	3.47E-7	2.88E-7	4.87E-8	1.26E-6	2.96E-7	4.78E-8
		t-Student	7.9739	14.0111	-13.786	41.136	-5.9898	-4.3276	-1.9173	-1.989
		3 meses	1.3327	-162.926	-22.486	-96.123	-40.111	-6.2189	-20.012	-21.301
		9 meses	-2.7491	0.0842	-1.8500	9.1934	-2.3815	0.5341	-9.6862	-20.092
		sin reestimar	-10.455	-1.0179	0.8536	23.465	-3.9153	0.3260	-0.1791	-3.0225
		diario	-26.465	0.2365	0.2540	0.2524	1.2097	-0.0779	-0.0387	0.2620
		mensual	7.9401	-0.6265	-1.0109	24.540	1.4497	1.0873	-2.2564	1.1834

Tabla 8. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para la serie BBVA. La tabla muestra para cada función de error y *proxy* el error de predicción de cada modelo. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses y 9 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun. Error	Proxy	Estrategia de estimación	2010 2 trim.	2010 3 trim.	2010 4 trim.	2011 1 trim.	2011 2 trim.	2011 3 trim.	2011 4 trim.	2012 1 trim.
NQLIKE	r^2	Base	1.1680	1.0553	0.9846	1.0057	1.0104	1.1455	1.0653	1.0473
		t-Student	1.3877	1.0416	1.0190	1.0236	1.0049	1.1243	1.0678	1.0513
		3 meses	1.2316	1.0390	1.1319	1.0071	1.0734	1.0650	1.0411	1.0423
		9 meses	1.1707	1.0634	0.9851	1.0002	1.0122	1.1343	1.0649	1.0654
		sin reestimar	1.9083	1.0577	0.9781	0.9945	1.0132	1.1787	1.0610	1.0458
		diario	1.2000	1.0544	0.9869	1.0008	1.0102	1.1554	1.0714	1.0494
		mensual	1.2024	1.0535	0.9844	0.9981	1.0142	1.1499	1.0627	1.0426
NQLIKE	rv	Base	0.6956	1.0891	0.6649	1.6218	0.8477	1.5232	0.9960	0.9939
		t-Student	0.9236	0.9478	0.8264	1.3686	0.8659	1.5693	1.0069	1.0097
		3 meses	0.9523	1.5039	1.3887	1.7130	1.2248	1.3887	1.1718	1.0551
		9 meses	0.7098	1.0177	0.6895	1.5510	0.8584	1.4833	1.0732	1.1101
		sin reestimar	2.2616	1.0815	0.6522	1.6181	0.8891	1.6127	0.9900	1.0181
		diario	0.7443	1.0932	0.6624	1.6275	0.8420	1.5296	0.9991	1.0014
		mensual	0.8140	1.0924	0.6659	1.5061	0.8353	1.5231	1.0133	0.9801
NMSE	r^2	Base	1.0905	1.2848	1.0530	1.0843	1.0358	1.0799	1.0697	1.0945
		t-Student	1.0828	1.1901	1.0584	1.0476	1.0110	1.0724	1.0754	1.1031
		3 meses	1.0824	1.6841	1.1307	1.2932	1.0630	1.0553	1.0580	1.1020
		9 meses	1.0974	1.3001	1.0518	1.0673	1.0607	1.0717	1.0821	1.1420
		sin reestimar	1.1310	1.2934	1.0397	1.0337	1.0447	1.0881	1.0674	1.0973
		diario	1.1633	1.2821	1.0541	1.0620	1.0366	1.0910	1.0728	1.0963
		mensual	1.0717	1.2859	1.0418	1.0362	1.0435	1.0748	1.0706	1.0895
NMSE	rv	Base	1.2739	1.1002	0.7520	3.2652	0.7905	1.0907	1.0028	0.9933
		t-Student	1.1723	0.9461	0.8557	1.9220	0.8379	1.1379	1.0220	1.0131
		3 meses	1.2569	2.8928	0.9211	6.4038	1.1076	1.1586	1.2035	1.2049
		9 meses	1.3089	1.0993	0.7659	2.9650	0.8094	1.0849	1.0999	1.1929
		sin reestimar	1.4071	1.1114	0.7456	2.4990	0.8215	1.0872	1.0046	1.0233
		diario	1.6111	1.0976	0.7501	3.2569	0.7810	1.0916	1.0032	0.9907
		mensual	1.1728	1.1071	0.7596	2.4639	0.7791	1.0789	1.0254	0.9816

APÉNDICE A. ERRORES DE PREDICCIÓN DE LOS MODELOS GARCH

Tabla 9. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para los valores del NYSE y NASDAQ. La tabla muestra para cada función de error y *proxy* el error de predicción utilizando la estrategia principal, y el porcentaje de mejora o empeoramiento para el resto de estrategias. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses y 9 meses, sin reestimación de parámetros, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun Error	Proxy	Estrategia	AAPL	AMZN	BAC	GOOG	GS	IBM	JCP	MRK	MSFT	PCLN	WAG	YHOO
QLIKE	r^2	Base	1.9512	2.1547	1.2871	1.5641	1.6662	1.6889	1.3588	1.3022	1.4765	1.4803	2.3203	1.4691
		t-Student	0.362	6.126	-0.1218	3.9601	0.3222	7.3217	-3.4409	2.0392	2.7966	0.1821	2.5505	-0.9925
		3 meses	-6.7399	2.3356	-0.1262	6.5734	-0.4705	3.2269	6.939	5.2031	7.5492	2.176	-32.971	-3.0194
		9 meses	0.0979	-2.6841	-0.3886	6.8918	0.2262	4.6961	0.9176	-2.0966	1.3179	0.3107	0.1341	-0.2342
		sin reestimar	0.5907	0.4922	0.0577	-1.9654	-0.0767	7.4116	-7.2736	-1.5477	0.7621	0.6471	0.4423	0.4173
		diario	-0.2344	-1.8146	0.3925	-0.5715	0.0624	-2.1795	-1.8284	-0.6477	0.7845	1.2124	-3.7064	0.1241
		mensual	-0.0555	-0.1322	0.1175	0.504	-0.2332	0.3301	0.5011	0.2527	0.059	-0.3817	-1.1443	-1.0127
QLIKE	rv	Base	0.5887	1.3868	0.3476	0.5391	0.1986	0.4378	0.4792	0.2533	0.3572	0.3901	1.3512	0.5848
		t-Student	-1.2279	12.4734	-1.1552	16.9224	-4.368	21.3178	-12.0783	3.2378	-21.1885	-1.9492	3.4986	-2.2814
		3 meses	-13.8257	5.2199	8.5	26.1445	-36.582	21.3201	15.4856	-13.7392	-37.1338	-0.1275	-83.5148	0.4161
		9 meses	0.5382	-6.8873	-1.1916	27.8853	1.2331	18.5693	8.0532	-6.7029	7.5585	2.2471	-0.7191	-0.3382
		sin reestimar	1.4758	-0.3023	-3.0105	-7.1476	-0.9125	19.2844	-22.7821	-4.9972	-3.8058	2.3356	-3.5721	0.1767
		diario	-1.8113	-4.3429	-0.6208	-2.0944	-0.0167	-9.9148	-5.8424	-0.904	-2.7442	2.7584	-10.5169	-0.6698
		mensual	0.1505	-0.4957	0.7845	1.713	-2.1238	1.9703	1.4301	0.2948	-0.0481	0.5144	-1.3093	-0.4453
MSE	r^2	Base	1.16E-07	2.25E-06	5.81E-08	6.35E-08	1.32E-08	1.60E-08	8.54E-07	1.22E-08	4.19E-08	8.90E-08	9.15E-06	5.38E-07
		t-Student	0.5192	13.5827	2.1386	22.6887	0.5261	13.9698	-15.5119	6.0244	10.9569	-0.6071	-0.6081	4.2109
		3 meses	-4.3537	0.386	2.3313	31.1858	3.5347	13.9049	26.2687	-9.4573	14.5013	2.1379	0.4229	4.9069
		9 meses	0.0146	-7.616	-2.2187	22.3253	1.3149	11.561	-3.3401	-6.7424	0.4535	0.6428	0.1083	-2.6778
		sin reestimar	0.613	-3.3999	0.7177	-9.2596	-0.5479	15.2117	-38.1312	-4.3604	1.6893	0.5722	0.6242	-2.6044
		diario	-0.3018	-3.6401	1.1457	-2.5511	0.0618	-2.5318	-9.1872	-1.8024	1.9919	1.7423	0.7413	-0.6432
		mensual	-0.0199	6.3466	0.991	0.5663	-0.4888	0.3151	1.9742	0.5937	2.3684	-0.2417	-29.0089	-1.2045
MSE	rv	Base	9.28E-08	4.46E-06	1.45E-08	3.66E-08	4.15E-09	6.27E-09	6.22E-07	3.93E-09	1.83E-08	3.08E-08	1.79E-05	2.37E-07
		t-Student	-0.3541	6.8253	5.5529	41.9766	-6.6755	27.1758	-23.1924	5.2207	-42.541	-2.7772	-0.1719	7.0016
		3 meses	-5.1931	0.2165	11.5797	54.7353	-15.233	31.3329	24.7374	-28.321	-46.5285	-3.7457	-0.8987	10.319
		9 meses	0.2208	-3.7883	-7.2709	41.3432	2.5371	26.545	2.1446	-12.3908	9.3424	2.1897	0.037	-4.7586
		sin reestimar	0.6735	-1.6217	-2.7898	-16.8066	-1.3376	26.8749	-49.949	-8.8936	-7.1989	1.2562	0.119	-4.1354
		diario	-0.6649	-1.8378	0.7593	-4.4446	-0.3551	-10.5359	-11.9108	-1.7159	-6.0566	2.4439	0.0809	-1.388
		mensual	0.0697	3.0378	3.2116	1.8426	-1.0047	1.3459	2.6486	0.4878	-6.3308	0.3651	-13.6835	0.3411

Tabla 10. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para el conjunto de valores del NYSE y NASDAQ. La tabla muestra para cada función de error y h_{t+1} el error de predicción de cada modelo. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses y 9 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun. Error	Proxy	Estrategia	AAPL	AMZN	BAC	GOOG	GS	IBM	JCP	MRK	MSFT	PCLN	WAG	YHOO
NQLIKE	r^2	Base	1.0107	1.134	1.0363	1.1235	1.0241	1.1016	1.2337	1.0957	1.098	1.0765	0.8976	1.0162
		t-Student	1.0071	1.0645	1.0376	1.079	1.0208	1.021	1.2761	1.0734	1.0673	1.0746	0.8747	1.0263
		3 meses	1.0788	1.1075	1.0377	1.0496	1.0289	1.0661	1.1481	1.0387	1.0151	1.0531	1.1936	1.0469
		9 meses	1.0097	1.1645	1.0404	1.0461	1.0218	1.0499	1.2224	1.1187	1.0836	1.0732	0.8964	1.0186
		sin reestimar	1.0047	1.1284	1.0357	1.1456	1.0249	1.02	1.3234	1.1127	1.0897	1.0695	0.8936	1.012
		diario	1.0131	1.1546	1.0323	1.1299	1.0234	1.1256	1.2563	1.1028	1.0894	1.0635	0.9309	1.0149
		mensual	1.0113	1.1355	1.0351	1.1178	1.0265	1.098	1.2275	1.0929	1.0974	1.0806	0.9079	1.0265
NQLIKE	rv	Base	1.0052	1.305	1.2443	1.6391	1.0294	1.2749	1.5842	1.2019	0.8388	1.1307	0.784	0.9906
		t-Student	1.0175	1.1422	1.2587	1.3617	1.0744	1.0031	1.7755	1.163	1.0166	1.1527	0.7566	1.0132
		3 meses	1.1442	1.2369	1.1385	1.2106	1.406	1.0031	1.3389	1.3671	1.1503	1.1321	1.4388	0.9865
		9 meses	0.9998	1.3949	1.2591	1.182	1.0167	1.0382	1.4566	1.2825	0.7754	1.1053	0.7897	0.994
		sin reestimar	0.9904	1.309	1.2817	1.7562	1.0388	1.029	1.9451	1.262	0.8708	1.1043	0.812	0.9889
		diario	1.0234	1.3617	1.252	1.6734	1.0296	1.4013	1.6768	1.2128	0.8619	1.0995	0.8665	0.9972
		mensual	1.0037	1.3115	1.2345	1.611	1.0513	1.2498	1.5615	1.1984	0.8392	1.1249	0.7943	0.995
NMSE	r^2	Base	1.0108	1.2367	1.0883	1.5162	1.0706	1.2038	2.0983	1.2394	1.1802	1.1114	1.024	1.0741
		t-Student	1.0055	1.0687	1.065	1.1722	1.065	1.0356	2.4238	1.1647	1.0509	1.1182	1.0302	1.0288
		3 meses	1.0548	1.2319	1.0629	1.0433	1.0328	1.0364	1.5471	1.3566	1.0091	1.0877	1.0197	1.0214
		9 meses	1.0106	1.3309	1.1125	1.1777	1.0565	1.0646	2.1684	1.323	1.1748	1.1043	1.0229	1.1028
		sin reestimar	1.0046	1.2787	1.0805	1.6566	1.0765	1.0207	2.8985	1.2934	1.1603	1.1051	1.0176	1.102
		diario	1.0138	1.2817	1.0759	1.5549	1.07	1.2342	2.2911	1.2617	1.1567	1.0921	1.0164	1.081
		mensual	1.011	1.1582	1.0775	1.5076	1.0758	1.2	2.0569	1.232	1.1522	1.1141	1.3211	1.087
NMSE	rv	Base	1.0021	1.106	1.5267	2.4742	1.0311	1.3949	2.0745	1.3194	0.7086	1.131	1.0067	1.0976
		t-Student	1.0057	1.0305	1.4419	1.4356	1.0999	1.0159	2.5556	1.2505	1.01	1.1624	1.0084	1.0208
		3 meses	1.0542	1.1036	1.3499	1.1199	1.1882	0.9579	1.5613	1.6931	1.0383	1.1733	1.0158	0.9843
		9 meses	0.9999	1.1479	1.6377	1.4513	1.0049	1.0247	2.03	1.4829	0.6424	1.1062	1.0063	1.1498
		sin reestimar	0.9954	1.1239	1.5693	2.89	1.0449	1.0201	3.1106	1.4367	0.7596	1.1168	1.0055	1.143
		diario	1.0088	1.1263	1.5151	2.5842	1.0348	1.5419	2.3216	1.342	0.7515	1.1033	1.0059	1.1128
		mensual	1.0014	1.0724	1.4777	2.4286	1.0415	1.3762	2.0195	1.313	0.7534	1.1269	1.1445	1.0939

APÉNDICE A. ERRORES DE PREDICCIÓN DE LOS MODELOS GARCH

Tabla 11. Comparación de modelos para el futuro del índice IBEX 35 PLUS. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos GARCH, HIS a 60 días y RiskMetrics. Los mejores resultados de cada trimestre se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun. Error	Proxy	Modelo	2002				2003			
			1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.
NQLIKE	r^2	GARCH(1,1)	1.0065	0.9521	1.0799	1.0302	1.0418	1.0686	1.0775	1.0500
		TGARCH(1,1)	0.9769	0.9120	1.0551	1.0058	1.0186	1.0517	1.0263	1.0389
		EGARCH(1,1)	0.9865	0.8857	1.0334	0.9977	1.0079	1.0631	1.0233	1.0281
		AGARCH(1,1)	1.0197	1.1283	1.2206	1.0445	1.1231	1.0984	1.1361	1.1193
		APARCH(1,1)	1.0201	1.2779	1.6253	1.0562	1.1904	1.1336	1.1130	1.0812
		RiskMetrics	0.9972	0.9849	1.0801	1.0185	1.0316	1.0634	1.0407	1.0294
		HIS	1.0398	1.0447	1.2940	1.0297	1.0136	1.1365	1.0467	1.0202
NQLIKE	rv	GARCH(1,1)	1.0962	0.5181	1.0942	0.7677	0.9242	1.2096	1.4898	1.1253
		TGARCH(1,1)	0.9494	0.4072	0.8424	0.6552	0.9840	1.0642	1.1211	0.9504
		EGARCH(1,1)	1.1878	0.3833	0.9790	0.7245	1.0693	0.9670	1.1160	0.9744
		AGARCH(1,1)	1.1792	1.0019	1.5581	0.9937	0.9696	1.4622	2.0271	1.8688
		APARCH(1,1)	1.2442	1.6813	3.2097	1.2693	1.1574	1.7294	1.7742	1.4939
		RiskMetrics	1.1355	0.6031	1.2255	0.8990	0.9041	1.1664	1.1442	0.9505
		HIS	1.6216	0.9945	1.8307	1.3135	0.9494	1.9125	1.4274	1.0382
NMSE	r^2	GARCH(1,1)	1.0320	0.9186	1.0686	1.0696	1.0381	1.2032	1.1899	1.1205
		TGARCH(1,1)	0.9971	0.8567	1.0494	0.9927	1.0141	1.0805	1.0829	1.0565
		EGARCH(1,1)	1.0690	0.8026	1.0333	1.0107	0.9826	0.9582	1.0708	1.0247
		AGARCH(1,1)	1.0617	1.0800	1.1231	1.0864	1.0831	1.3330	1.4104	1.3517
		APARCH(1,1)	1.0626	1.1419	1.2446	1.1575	1.1004	1.5587	1.3162	1.1797
		RiskMetrics	1.0201	0.9519	1.0680	1.0557	1.0287	1.1972	1.0701	1.0539
		HIS	1.1248	1.0267	1.1768	1.0961	1.0156	1.4016	1.0917	1.0355
NMSE	rv	GARCH(1,1)	1.2417	0.8040	1.1796	0.7830	0.9354	1.2758	2.2682	1.2911
		TGARCH(1,1)	1.0568	0.7160	0.8781	0.6586	1.0238	1.1220	1.4731	0.9893
		EGARCH(1,1)	1.7260	0.6962	1.0389	0.9293	1.0699	0.8685	1.4098	1.0104
		AGARCH(1,1)	1.3708	0.9853	1.3265	1.0080	0.9481	1.5662	3.9621	2.7606
		APARCH(1,1)	1.5082	1.0798	1.7243	1.4827	1.0009	2.1407	3.1492	1.7545
		RiskMetrics	1.4414	0.8759	1.3055	0.9373	0.9163	1.2642	1.3579	0.9908
		HIS	2.4485	0.9978	1.5080	1.5228	0.9618	2.1452	1.8618	1.0558

Tabla 12. Comparación de modelos para el futuro del índice DJ EURO STOXX 50. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos GARCH, HIS a 60 días y RiskMetrics. Los mejores resultados de cada trimestre se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun. Error	Proxy	Modelo	2002				2003			
			1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.
NQLIKE	r^2	GARCH(1,1)	1.0316	0.9476	1.1028	1.0135	1.0109	1.0155	1.0344	1.0079
		TGARCH(1,1)	0.9926	0.9032	1.0277	1.0349	0.9884	0.9967	1.0081	0.9754
		EGARCH(1,1)	0.9694	0.9024	0.9927	0.9834	1.0030	0.9870	1.0202	0.9444
		AGARCH(1,1)	1.0741	1.1244	1.3015	1.0541	1.0975	1.0124	1.0645	1.0536
		APARCH(1,1)	1.1213	1.4312	1.5782	1.1042	1.3460	1.0285	1.0614	1.0400
		RiskMetrics	1.0265	0.9812	1.0753	0.9986	1.0073	1.0178	1.0180	0.9908
		HIS	1.0605	1.0573	1.3054	0.9941	1.0170	1.0839	1.0382	1.0195
NQLIKE	rv	GARCH(1,1)	1.4759	0.5683	1.0300	0.8489	0.7116	0.9593	1.1855	1.3422
		TGARCH(1,1)	1.0411	0.4740	0.5077	0.7787	0.6992	0.8309	1.0102	0.9654
		EGARCH(1,1)	1.1252	0.4171	0.5485	0.7574	1.1654	0.7536	1.3025	0.7952
		AGARCH(1,1)	1.8192	0.9210	2.0868	1.0298	1.2268	0.9813	1.4768	1.8570
		APARCH(1,1)	2.1457	1.6038	4.4419	1.4478	2.4639	1.1954	1.4629	1.5205
		RiskMetrics	1.5516	0.5641	1.0606	0.9002	0.7088	1.1615	1.1259	1.0468
		HIS	1.9921	0.9029	1.7731	1.1178	0.9332	1.8471	1.4398	1.3022
NMSE	r^2	GARCH(1,1)	1.1332	0.9424	1.0789	1.0165	1.0273	1.1015	1.0715	1.0597
		TGARCH(1,1)	1.0005	0.8236	1.0445	1.0396	0.9653	1.0323	1.0151	0.9782
		EGARCH(1,1)	0.9411	0.7909	0.9918	0.9648	0.9518	0.9394	0.9829	0.9207
		AGARCH(1,1)	1.2233	1.0468	1.1355	1.0386	1.0628	1.0860	1.1521	1.1502
		APARCH(1,1)	1.3446	1.1277	1.2248	1.1239	1.1120	1.1854	1.1455	1.0954
		RiskMetrics	1.1333	0.9537	1.0564	1.0019	1.0082	1.1158	1.0246	1.0086
		HIS	1.2896	1.0293	1.1375	0.9843	1.0185	1.2690	1.0820	1.0314
NMSE	rv	GARCH(1,1)	2.0031	0.8407	1.0372	0.9365	0.6527	1.0939	1.4601	2.0587
		TGARCH(1,1)	1.1823	0.7822	0.4507	0.8451	0.7758	1.0789	1.0822	1.2741
		EGARCH(1,1)	1.2697	0.6430	0.5343	0.8128	1.3120	0.8131	1.1045	0.9185
		AGARCH(1,1)	2.3615	0.9565	1.4280	0.9400	0.7847	1.0100	1.9894	2.8805
		APARCH(1,1)	2.8983	1.0794	1.9503	1.3870	1.1072	1.3870	2.0056	2.0575
		RiskMetrics	2.2626	0.8344	1.0791	0.9523	0.6868	1.3706	1.3181	1.2964
		HIS	3.5244	0.9747	1.3355	1.1410	0.9516	2.4040	2.0171	1.3897

APÉNDICE A. ERRORES DE PREDICCIÓN DE LOS MODELOS GARCH

Tabla 13. Comparación de modelos para la serie BBVA. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos GARCH, HIS a 60 días y RiskMetrics. Los mejores resultados de cada trimestre se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun. Error	Proxy	Modelo	2010			2011			2012	
			2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.
NQLIKE	r^2	GARCH(1,1)	1.1680	1.0553	0.9846	1.0057	1.0104	1.1455	1.0653	1.0473
		TGARCH(1,1)	1.0178	1.0442	0.9194	0.9971	1.0314	1.0798	1.0234	1.0351
		EGARCH(1,1)	1.0055	1.0379	0.9391	-	-	1.0617	-	1.0271
		AGARCH(1,1)	1.2860	1.0594	1.1656	1.1450	1.0130	1.2802	1.0730	1.0579
		APARCH(1,1)	1.6221	1.0786	1.3412	1.1712	1.0685	1.5892	1.0782	1.1139
		RiskMetrics	1.1957	1.0411	1.0251	1.0218	1.0082	1.0520	1.0416	1.0368
		HIS	1.5455	1.1678	1.1038	1.0323	1.0541	1.1236	1.0219	1.0344
NQLIKE	rv	GARCH(1,1)	0.6956	1.0891	0.6649	1.6218	0.8477	1.5232	0.9960	0.9939
		TGARCH(1,1)	0.4531	1.3649	0.6362	1.5081	0.7768	0.8805	0.9754	1.0219
		EGARCH(1,1)	0.4299	1.3379	0.6837	-	-	0.8261	-	1.0276
		AGARCH(1,1)	0.9765	1.3524	1.2132	3.0166	1.4788	2.9380	0.9830	1.2327
		APARCH(1,1)	1.7516	1.4973	1.8658	2.7860	1.5343	5.7199	1.1657	1.9023
		RiskMetrics	0.9680	1.2296	1.0112	1.3757	1.0655	1.2920	1.0407	0.8890
		HIS	1.7600	1.9535	1.4824	1.1910	1.2081	2.0110	1.1913	1.0557
NMSE	r^2	GARCH(1,1)	1.0905	1.2848	1.0530	1.0843	1.0358	1.0799	1.0697	1.0945
		TGARCH(1,1)	0.9837	1.3106	0.9336	0.9928	1.0843	1.0731	1.0325	1.0730
		EGARCH(1,1)	0.9770	1.2272	0.9465	-	-	1.0350	-	1.0561
		AGARCH(1,1)	1.1054	1.3456	1.1339	1.0980	0.9963	1.1359	1.0589	1.1534
		APARCH(1,1)	1.1137	1.5703	1.1939	1.3483	1.0379	1.2312	1.0976	1.3838
		RiskMetrics	1.0459	1.2749	1.0190	1.0181	1.0015	1.0332	1.0563	1.0568
		HIS	1.0489	2.3491	1.0588	1.0261	1.0540	1.0627	1.0320	1.0958
NMSE	rv	GARCH(1,1)	1.2739	1.1002	0.7520	3.2652	0.7905	1.0907	1.0028	0.9933
		TGARCH(1,1)	0.8285	1.4152	0.8449	1.2000	0.7073	0.8227	0.9990	0.9846
		EGARCH(1,1)	0.8066	1.2133	0.8514	-	-	0.8242	-	0.9447
		AGARCH(1,1)	1.3128	1.5403	0.9370	2.9801	1.0944	1.3784	0.9793	1.4196
		APARCH(1,1)	1.3325	2.3447	1.0682	7.5628	1.1660	1.6230	1.2468	3.0095
		RiskMetrics	1.0581	1.4739	0.9425	1.3848	0.9239	1.1018	1.0641	0.8615
		HIS	1.0984	5.5541	1.1029	1.2133	1.1479	1.2748	1.2403	1.1811

Fun. Error	Proxy	Modelo	AAPL	AMZN	BAC	GOOG	JCP	WAG	MSFT	YHOO	GS	IBM	PCLN	MRK
NQLIKE	r^2	GARCH(1,1)	1.0107	1.134	1.0363	1.1235	1.2337	0.8976	1.098	1.0162	1.0241	1.1016	1.0765	1.0957
		TGARCH(1,1)	1.0791	1.1195	1.0237	1.1098	1.1307	1.4361	1.1034	1.0228	1.0156	1.1075	1.0443	1.0942
		EGARCH(1,1)	1.0453	1.1667	1.1011	1.1225	1.2088	1.0532	1.1179	1.0027	1.0166	-	1.0749	1.0972
		AGARCH(1,1)	1.0143	1.098	1.0575	1.2159	1.2369	0.8946	1.0998	1.0124	1.0488	-	1.0839	1.156
		APARCH(1,1)	1.0453	1.0868	1.0563	1.1041	1.2637	1.1468	1.1125	1.0711	1.0682	1.0347	1.0879	1.1516
		RiskMetrics	1.0852	1.0897	1.0548	1.0303	1.0596	1.1674	1.1137	1.073	1.0355	1.0458	1.0408	1.0284
		HIS	1.0709	1.0856	1.0342	1.0233	1.1832	1.3156	1.0489	1.0192	1.004	0.9781	1.014	1.064
NQLIKE	r^2	GARCH(1,1)	1.0052	1.305	1.2443	1.6391	1.5842	0.784	0.8388	0.9906	1.0294	1.2749	1.1307	1.2019
		TGARCH(1,1)	1.0062	1.2656	1.2809	1.5447	1.3578	1.96	0.8338	1.0035	1.0037	1.3016	1.1215	1.2416
		EGARCH(1,1)	0.9998	1.4023	1.4136	1.642	1.6246	1.1282	0.876	0.9465	0.9938	-	1.327	1.2859
		AGARCH(1,1)	1.0182	1.2521	1.2799	1.8188	1.6246	0.7647	0.8676	1.0249	1.2800	-	1.1479	1.4729
		APARCH(1,1)	1.0356	1.1835	1.4041	1.5127	1.7555	1.384	0.8354	1.162	1.4533	1.3158	1.1291	1.447
		RiskMetrics	1.0109	1.1831	1.0724	1.0569	1.1295	1.3065	0.9048	0.9973	1.2906	1.0036	1.0007	1.2279
		HIS	1.1407	1.2422	1.1217	1.1208	1.4779	1.6706	1.068	1.0117	1.0948	0.9468	1.1335	1.1491
NMSE	r^2	GARCH(1,1)	1.0108	1.2367	1.0883	1.5162	2.0983	1.024	1.1802	1.0741	1.0706	1.2038	1.1114	1.2394
		TGARCH(1,1)	1.627	1.0698	1.059	2.0086	1.4877	1.0232	1.1519	1.056	1.0424	1.1985	1.0606	1.388
		EGARCH(1,1)	1.7133	1.0863	1.2062	1.7506	1.9246	1.015	1.1658	0.9995	1.0364	-	1.1495	1.4263
		AGARCH(1,1)	1.0165	1.1745	1.1817	2.5007	2.9902	1.0342	1.2218	1.0685	1.1678	1.1569	1.1529	1.4644
		APARCH(1,1)	1.0737	1.751	1.0901	1.31	3.227	1.0132	1.3124	1.0698	1.3102	1.0392	1.1417	1.4383
		RiskMetrics	1.0356	1.0417	1.0511	1.0428	1.1281	1.0434	1.0514	1.0345	1.0546	1.034	1.0464	1.044
		HIS	1.0424	1.0255	1.0528	1.0427	1.7916	1.0285	1.0239	1.0153	1.0096	0.9821	1.0211	1.1414
NMSE	r^2	GARCH(1,1)	1.0021	1.106	1.5267	2.4742	2.0745	1.0067	0.7086	1.0976	1.0311	1.3949	1.131	1.3194
		TGARCH(1,1)	1.7425	1.0409	1.7322	3.8663	1.4464	1.0199	0.7756	1.0706	0.982	1.4305	1.1429	1.6642
		EGARCH(1,1)	1.8399	1.0515	2.0844	3.2226	1.951	1.0114	0.8043	0.9664	0.9575	-	1.4962	1.8169
		AGARCH(1,1)	1.0084	1.0782	1.8506	4.6823	3.0713	1.0104	0.7154	1.11	1.3864	1.252	1.1888	1.8987
		APARCH(1,1)	1.0418	1.3239	1.7418	1.8903	3.418	1.0131	0.6484	1.1572	1.8319	1.0319	1.1672	1.8624
		RiskMetrics	0.9872	1.0217	1.1083	1.0642	1.1094	1.0237	0.9481	1.0009	1.1492	0.9897	1.0121	1.1641
		HIS	1.0367	1.0181	1.2526	1.1449	1.8812	1.0214	1.0201	1.0139	1.0635	0.9712	1.2051	1.2249

Tabla 14. Comparación de modelos para el conjunto de valores del NYSE y NASDAQ. La tabla muestra para cada función de error y proxy el error de predicción de los modelos GARCH, HIS a 60 días y RiskMetrics. Los mejores resultados de cada serie se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Apéndice B

Errores de predicción de los modelos

LMS-GARCH y RLS-GARCH

APÉNDICE B. ERRORES DE PREDICCIÓN DE LOS MODELOS LMS-GARCH Y RLS-GARCH

Tabla 15. Comparación de modelos para el futuro del índice IBEX 35 PLUS. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos: GARCH(1,1), LMS-GARCH-R2(1,1), LMS-GARCH-RV(1,1), RLS-GARCH-R2(1,1) y RLS-GARCH-RV(1,1). Los mejores resultados de cada trimestre se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun. Error	Proxy	Modelo	2002				2003			
			1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.
NQLIKE	r^2	GARCH 21 meses entren.	1.0065	0.9521	1.0799	1.0302	1.0418	1.0686	1.0775	1.0500
		LMS-GARCH-R2	0.9879	0.9796	1.0111	1.0124	1.0680	1.0630	1.0573	1.0329
		LMS-GARCH-RV	0.9598	0.9593	0.9943	0.9859	1.0943	1.0342	1.0901	1.0015
		RLS-GARCH-R2	1.0883	1.0000	1.4725	1.0537	1.0059	1.1520	1.2674	1.1304
		RLS-GARCH-RV	0.9691	0.9529	1.0734	1.0486	1.0679	1.0372	1.0565	1.0283
NQLIKE	rv	GARCH 21 meses entren.	1.0962	0.5181	1.0942	0.7677	0.9242	1.2096	1.4898	1.1253
		LMS-GARCH-R2	1.0255	0.5027	1.1451	0.8128	1.0568	0.8834	1.0545	0.9618
		LMS-GARCH-RV	0.8889	0.5881	0.9638	0.6964	1.1158	0.7545	0.9822	1.0065
		RLS-GARCH-R2	1.8614	0.8876	1.8257	1.0944	1.0720	2.1037	2.9753	2.0621
		RLS-GARCH-RV	0.8460	0.5748	1.1456	0.8314	0.8144	1.0713	1.0988	1.0332
NMSE	r^2	GARCH 21 meses entren.	1.0320	0.9186	1.0686	1.0696	1.0381	1.2032	1.1899	1.1205
		LMS-GARCH-R2	0.9919	0.9361	1.0115	1.0348	1.0815	1.1422	1.0807	1.0556
		LMS-GARCH-RV	0.9455	0.8750	0.9610	0.9943	1.0607	1.0654	1.0328	1.0080
		RLS-GARCH-R2	1.2919	0.9968	1.2570	1.2054	1.0123	1.4801	2.0311	1.4257
		RLS-GARCH-RV	0.9645	0.9082	1.0566	1.1287	1.0515	1.0969	1.0721	1.0580
NMSE	rv	GARCH 21 meses entren.	1.2417	0.8040	1.1796	0.7830	0.9354	1.2758	2.2682	1.2911
		LMS-GARCH-R2	1.2329	0.7842	1.3576	0.9460	1.1129	1.0077	1.2040	1.0174
		LMS-GARCH-RV	0.9506	0.8701	1.0436	0.7664	1.0913	0.8691	0.9863	1.0407
		RLS-GARCH-R2	2.8998	0.9570	1.4454	1.3128	1.1019	2.4578	8.6410	3.4474
		RLS-GARCH-RV	0.8973	0.8196	1.1579	0.8630	0.8677	1.1071	1.2611	1.0588

Tabla 16. Comparación de modelos para el futuro del índice DJ EURO STOXX 50. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos GARCH(1,1), LMS-GARCH-R2(1,1), LMS-GARCH-RV(1,1), RLS-GARCH-R2(1,1) y RLS-GARCH-RV(1,1). Los mejores resultados de cada trimestre se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun. Error	Proxy	Modelo	2002				2003			
			1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.
NQLIKE	r^2	GARCH 21 meses entren.	1.0316	0.9476	1.1028	1.0135	1.0109	1.0155	1.0344	1.0079
		LMS-GARCH-R2	1.0073	1.0142	1.0146	1.0027	1.0303	1.0008	1.0144	0.9925
		LMS-GARCH-RV	0.9776	0.9526	0.9683	0.9678	1.0326	0.9705	0.9967	0.9506
		RLS-GARCH-R2	1.1197	0.9578	1.7280	1.0976	1.0239	1.0394	1.2228	1.0587
		RLS-GARCH-RV	1.1074	0.9916	1.1166	0.9761	1.0251	0.9811	1.0641	1.0097
NQLIKE	rv	GARCH 21 meses entren.	1.4759	0.5683	1.0300	0.8489	0.7116	0.9593	1.1855	1.3422
		LMS-GARCH-R2	1.3608	0.4610	1.0388	0.7830	0.8298	0.8849	1.0947	1.1503
		LMS-GARCH-RV	1.0584	0.4646	0.9594	0.7120	0.8855	0.6510	1.0070	0.8191
		RLS-GARCH-R2	2.4825	1.0001	2.8553	1.4645	1.1376	1.1509	2.9141	2.1627
		RLS-GARCH-RV	1.4687	0.8289	1.0054	0.6534	0.9655	0.7688	1.2403	0.9403
NMSE	r^2	GARCH 21 meses entren.	1.1332	0.9424	1.0789	1.0165	1.0273	1.1015	1.0715	1.0597
		LMS-GARCH-R2	1.0721	0.9796	1.0187	0.9982	1.0430	1.0668	1.0167	0.9944
		LMS-GARCH-RV	0.9612	0.8491	0.9413	0.9355	1.0301	0.9999	0.9997	0.9430
		RLS-GARCH-R2	1.6736	0.9212	1.3728	1.2397	1.1378	1.3502	1.9137	1.2105
		RLS-GARCH-RV	1.1956	0.9382	1.0400	0.9418	1.0259	1.0218	1.1009	1.0475
NMSE	rv	GARCH 21 meses entren.	2.0031	0.8407	1.0372	0.9365	0.6527	1.0939	1.4601	2.0587
		LMS-GARCH-R2	1.9115	0.7499	1.0459	1.0097	0.7861	1.1167	1.1930	1.5262
		LMS-GARCH-RV	1.0967	0.7357	0.9996	0.7510	0.8510	0.8820	0.9774	0.8833
		RLS-GARCH-R2	5.2395	1.0375	1.7745	1.8276	1.5615	1.9406	7.8721	3.8915
		RLS-GARCH-RV	1.6023	1.0273	0.8894	0.6441	0.9683	0.7849	1.4051	1.1541

APÉNDICE B. ERRORES DE PREDICCIÓN DE LOS MODELOS LMS-GARCH Y RLS-GARCH

Tabla 17. Comparación de modelos para la serie BBVA. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos GARCH(1,1), LMS-GARCH-R2(1,1), LMS-GARCH-RV(1,1), RLS-GARCH-R2(1,1) y RLS-GARCH-RV(1,1). Los mejores resultados de cada trimestre se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun. Error	Proxy	Modelo	2010				2011			2012
			2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.
NQLIKE	r^2	GARCH 9 meses entren.	1.1680	1.0553	0.9846	1.0057	1.0104	1.1455	1.0653	1.0473
		LMS-GARCH-R2	1.2482	1.0686	1.0194	1.0526	0.9960	1.0669	1.0247	1.0292
		LMS-GARCH-RV	1.1482	1.0065	0.9959	1.0195	1.0437	1.0081	1.0342	1.0176
		RLS-GARCH-R2	2.4891	1.3747	1.4014	1.1860	1.1207	1.3829	1.3515	1.0503
		RLS-GARCH-RV	1.4662	1.0596	1.0227	0.9715	1.0792	1.0770	1.0605	1.0556
NQLIKE	rv	GARCH 9 meses entren.	0.6956	1.0891	0.6649	1.6218	0.8477	1.5232	0.9960	0.9939
		LMS-GARCH-R2	1.1938	1.3167	1.2206	1.4368	1.1330	1.5709	1.0847	0.9301
		LMS-GARCH-RV	1.0428	0.9635	0.9691	1.1483	1.1425	1.0883	1.1100	0.9792
		RLS-GARCH-R2	3.2716	4.5327	1.9629	3.8763	0.9325	2.5111	1.6370	1.4596
		RLS-GARCH-RV	1.3063	0.9306	0.7032	0.9589	1.0299	1.5201	1.0661	1.3372
NMSE	r^2	GARCH 9 meses entren.	1.0905	1.2848	1.0530	1.0843	1.0358	1.0799	1.0697	1.0945
		LMS-GARCH-R2	1.0439	1.3918	1.0271	1.0402	0.9893	1.0447	1.0378	1.0555
		LMS-GARCH-RV	1.0355	1.0572	1.0606	1.0128	1.0443	1.0569	1.0410	1.0358
		RLS-GARCH-R2	1.2688	1.7211	1.5333	1.2003	1.2958	1.1671	1.4497	1.4105
		RLS-GARCH-RV	1.1248	1.3264	1.0766	0.9428	1.1559	1.0762	1.1414	1.2042
NMSE	rv	GARCH 9 meses entren.	1.2739	1.1002	0.7520	3.2652	0.7905	1.0907	1.0028	0.9933
		LMS-GARCH-R2	1.0730	1.9009	1.0409	1.4386	1.0386	1.1924	1.1155	0.9182
		LMS-GARCH-RV	1.0529	1.0516	1.0076	1.1209	1.0919	1.0933	1.1250	0.9664
		RLS-GARCH-R2	1.9636	2.8705	0.5987	7.7077	0.8425	1.0673	2.4320	2.9462
		RLS-GARCH-RV	1.3368	1.0654	0.5935	1.6481	0.9710	1.1455	1.4335	1.7496

Tabla 18. Comparación de modelos para el conjunto de valores del NYSE y NASDAQ. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos GARCH(1,1), LMS-GARCH-R2(1,1), LMS-GARCH-RV(1,1), RLS-GARCH-R2(1,1) y RLS-GARCH-RV(1,1). Los mejores resultados de cada serie se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun Error Proxy	Modelos	AAPL	AMZN	BAC	GOOG	JCP	WAG	MSFT	YHOO	GS	IBM	PCLN	MRK
NQLIKE r^2	GARCH 9 meses entren.	1.0107	1.1340	1.0363	1.1235	1.2337	0.8976	1.0980	1.0162	1.0241	1.1016	1.0765	1.0957
	LMS-GARCH-R2	1.0692	1.0635	1.0406	1.0268	1.0700	1.3145	1.0960	1.0656	1.0344	1.0231	1.0235	1.0232
	LMS-GARCH-RV	1.0433	1.1771	1.0054	1.0009	1.0659	1.5650	1.0866	1.0927	1.0054	1.0130	1.0176	1.0085
	RLS-GARCH-R2	1.0342	1.2039	1.0336	1.0444	1.7514	1.0689	1.0478	1.0314	1.0143	1.0459	1.0831	1.0869
	RLS-GARCH-RV	1.0272	1.1354	1.0074	1.0273	1.1744	2.5681	1.0812	1.0207	1.0248	1.0609	1.0405	1.0651
NQLIKE r^2	GARCH 9 meses entren.	1.0052	1.3050	1.2443	1.6391	1.5842	0.7840	0.8388	0.9906	1.0294	1.2749	1.1307	1.2019
	LMS-GARCH-R2	1.0151	1.1347	1.0961	1.0892	1.2092	1.6381	1.2210	1.0239	1.2342	0.9848	1.0225	1.1911
	LMS-GARCH-RV	1.0939	1.4089	1.0062	1.0204	1.2093	2.1304	1.1186	1.0509	1.0737	1.0158	1.0578	1.0402
	RLS-GARCH-R2	1.0995	1.5019	1.2374	1.2501	2.7106	1.0361	0.9042	1.0061	1.0203	1.1024	1.3637	1.1923
	RLS-GARCH-RV	1.1041	1.3493	1.1040	1.1759	1.1565	2.7060	1.0067	1.0038	1.0821	1.1692	1.2137	1.1206
NMSE rv	GARCH 9 meses entren.	1.0108	1.2367	1.0883	1.5162	2.0983	1.0240	1.1802	1.0741	1.0706	1.2038	1.1114	1.2394
	LMS-GARCH-R2	1.0353	1.0322	1.0439	1.0378	1.1864	1.0479	1.0477	1.0330	1.0533	1.0244	1.0332	1.0381
	LMS-GARCH-RV	1.0166	1.0731	1.0042	1.0041	1.1781	1.0866	1.0818	1.0327	1.0107	1.0185	1.0174	1.0120
	RLS-GARCH-R2	1.0369	1.3183	1.0554	1.1652	2.0878	1.0154	1.0486	1.1188	1.0364	1.0644	1.1731	1.2043
	RLS-GARCH-RV	1.0314	1.1237	1.0111	1.0658	1.7141	1.0208	1.0942	1.0471	1.0691	1.0900	1.0589	1.1345
NMSE rv	GARCH 9 meses entren.	1.0021	1.1060	1.5267	2.4742	2.0745	1.0067	0.7086	1.0976	1.0311	1.3950	1.1310	1.3194
	LMS-GARCH-R2	0.9933	1.0174	1.1397	1.0913	1.2068	1.0300	1.0375	1.0238	1.1300	0.9982	1.0220	1.1548
	LMS-GARCH-RV	1.0151	1.0406	1.0156	1.0264	1.2128	1.0504	1.0444	1.0152	1.0636	1.0235	1.0440	1.0399
	RLS-GARCH-R2	1.0503	1.1421	1.3960	1.4146	1.8039	1.0080	0.9353	1.1482	1.0206	1.0984	1.5376	1.3006
	RLS-GARCH-RV	1.0512	1.0560	1.1404	1.1855	1.4365	1.0137	0.9965	1.0403	1.0927	1.1771	1.2226	1.1691

APÉNDICE B. ERRORES DE PREDICCIÓN DE LOS MODELOS LMS-GARCH Y RLS-GARCH

Tabla 19. Comparación de modelos para la serie BBVA. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción del modelo GARCH(1,1) y varios modelos LMS-GARCH-RV(1,1) que emplean *m* a diferentes frecuencias. Los mejores resultados de cada serie se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun. Error	Proxy	Modelo	2010				2011			2012
			2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.
NQLIKE	r^2	GARCH	1.1680	1.0553	0.9846	1.0057	1.0104	1.1455	1.0653	1.0473
		LMS-GARCH-RV 30min.	1.1482	1.0065	0.9959	1.0195	1.0437	1.0081	1.0342	1.0176
		LMS-GARCH-RV 15min.	1.1463	1.0129	0.9838	1.0109	1.0274	1.0130	1.0321	1.0175
		LMS-GARCH-RV 5min.	1.0837	1.0265	0.9872	1.0293	1.0318	1.0223	1.0470	1.0162
		LMS-GARCH-RV 2min.	1.0603	1.0574	1.0032	1.0107	1.0234	1.0277	1.0442	1.0151
NQLIKE	rv	GARCH	0.6956	1.0891	0.6649	1.6218	0.8477	1.5232	0.9960	0.9939
		LMS-GARCH-RV 30min.	1.0428	0.9635	0.9691	1.1483	1.1425	1.0883	1.1100	0.9792
		LMS-GARCH-RV 15min.	1.0360	0.9728	0.9241	1.1662	1.1117	1.0316	1.1052	0.9786
		LMS-GARCH-RV 5min.	0.9193	0.9788	0.9227	1.2202	1.1055	0.9920	1.1623	0.9688
		LMS-GARCH-RV 2min.	0.8760	1.1193	0.9414	1.1530	1.0849	1.0004	1.1920	1.0116
NMSE	r^2	GARCH	1.0905	1.2848	1.0530	1.0843	1.0358	1.0799	1.0697	1.0945
		LMS-GARCH-RV 30min.	1.0355	1.0572	1.0606	1.0128	1.0443	1.0569	1.0410	1.0358
		LMS-GARCH-RV 15min.	1.0506	1.0856	1.0092	1.0119	1.0332	1.0834	1.0409	1.0355
		LMS-GARCH-RV 5min.	1.0577	1.1061	1.0021	1.0260	1.0431	1.1525	1.0602	1.0323
		LMS-GARCH-RV 2min.	1.0476	1.1945	1.0181	1.0156	1.0371	1.2161	1.0634	1.0337
NMSE	rv	GARCH	1.2739	1.1002	0.7520	3.2652	0.7905	1.0907	1.0028	0.9933
		LMS-GARCH-RV 30min.	1.0529	1.0516	1.0076	1.1209	1.0919	1.0933	1.1250	0.9664
		LMS-GARCH-RV 15min.	1.1203	1.1220	0.9553	1.1652	1.0833	1.0664	1.1370	0.9650
		LMS-GARCH-RV 5min.	1.1672	1.1129	0.9535	1.2412	1.0908	1.1131	1.2193	0.9637
		LMS-GARCH-RV 2min.	1.1248	1.3476	0.9639	1.2037	1.0848	1.1885	1.2858	1.0167

Tabla 20. Comparación de modelos para la serie BBVA. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción del modelo GARCH(1,1) y varios modelos RLS-GARCH-RV(1,1) que emplean *m* a diferentes frecuencias. Los mejores resultados de cada serie se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son verdes si el nivel de significancia es menor del 5%.

Fun.	Proxy	Modelo	2010			2011			2012	
Error			2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.	2 trim.	3 trim.	4 trim.	1 trim.
NQLIKE	r^2	GARCH	1.1680	1.0553	0.9846	1.0057	1.0104	1.1455	1.0653	1.0473
		RLS-GARCH-RV 4h.	1.5612	1.0637	1.0216	1.0043	1.1200	1.4028	1.1158	1.0536
		RLS-GARCH-RV 2h.	1.3998	1.0567	1.0263	0.9744	1.0968	1.2297	1.0843	1.0570
		RLS-GARCH-RV 1h.	1.4522	1.0597	1.0138	0.9682	1.0876	1.1824	1.0678	1.0558
		RLS-GARCH-RV 30min.	1.4662	1.0596	1.0227	0.9715	1.0792	1.0770	1.0605	1.0556
		RLS-GARCH-RV 15min.	1.6841	1.0790	1.0323	0.9754	1.0739	1.0511	1.0527	1.0588
		RLS-GARCH-RV 5min.	1.5531	1.0912	1.0404	0.9819	1.0769	1.0466	1.0654	1.0631
		RLS-GARCH-RV 2min.	1.4415	1.0965	1.0307	0.9815	1.0821	1.0349	1.0707	1.0702
NQLIKE	rv	GARCH	0.6956	1.0891	0.6649	1.6218	0.8477	1.5232	0.9960	0.9939
		RLS-GARCH-RV 4h.	1.4698	0.9670	0.6727	1.2639	0.9391	2.3832	1.1242	1.2337
		RLS-GARCH-RV 2h.	1.1757	0.9204	0.6892	1.0899	0.9548	1.9451	1.0853	1.2718
		RLS-GARCH-RV 1h.	1.3184	0.9250	0.7399	1.0037	0.9944	1.8871	1.0942	1.3027
		RLS-GARCH-RV 30min.	1.3063	0.9306	0.7032	0.9589	1.0299	1.5201	1.0661	1.3372
		RLS-GARCH-RV 15min.	1.6679	1.0555	0.7369	1.0312	1.0780	1.5146	1.1011	1.3719
		RLS-GARCH-RV 5min.	1.4990	1.0831	0.7586	1.0492	1.1428	1.3756	1.1910	1.4338
		RLS-GARCH-RV 2min.	1.3137	1.0557	0.7357	0.9923	1.1961	1.3625	1.2777	1.5342
NMSE	r^2	GARCH	1.0905	1.2848	1.0530	1.0843	1.0358	1.0799	1.0697	1.0945
		RLS-GARCH-RV 4h.	1.4111	1.3946	1.1220	0.9601	1.2645	1.1520	1.2815	1.2830
		RLS-GARCH-RV 2h.	1.2408	1.3385	1.1176	0.9727	1.2418	1.1116	1.1786	1.2576
		RLS-GARCH-RV 1h.	1.1696	1.3315	1.0731	0.9605	1.1922	1.1115	1.1538	1.2271
		RLS-GARCH-RV 30min.	1.1248	1.3264	1.0766	0.9428	1.1559	1.0762	1.1414	1.2042
		RLS-GARCH-RV 15min.	1.1612	1.5054	1.1710	0.9480	1.1467	1.0419	1.1190	1.2117
		RLS-GARCH-RV 5min.	1.1561	1.6402	1.2313	0.9492	1.1584	1.1048	1.1603	1.2350
		RLS-GARCH-RV 2min.	1.1636	1.6252	1.1681	0.9422	1.1787	1.1092	1.1741	1.2636
NMSE	rv	GARCH	1.2739	1.1002	0.7520	3.2652	0.7905	1.0907	1.0028	0.9933
		RLS-GARCH-RV 4h.	2.7539	1.3590	0.5347	2.1366	0.7908	1.0768	2.0244	2.0372
		RLS-GARCH-RV 2h.	1.8961	1.1687	0.5665	2.4177	0.8379	1.1183	1.5504	1.9158
		RLS-GARCH-RV 1h.	1.5524	1.1238	0.5587	2.1683	0.8947	1.1555	1.4963	1.8107
		RLS-GARCH-RV 30min.	1.3368	1.0654	0.5935	1.6481	0.9710	1.1455	1.4335	1.7496
		RLS-GARCH-RV 15min.	1.4789	1.4985	0.5275	2.2637	1.0595	1.1515	1.3722	1.8041
		RLS-GARCH-RV 5min.	1.4727	1.8227	0.5294	2.4644	1.1565	1.1757	1.6037	1.9632
		RLS-GARCH-RV 2min.	1.5205	1.7464	0.5577	1.9422	1.2413	1.2107	1.7217	2.1726

Tabla 21. Comparación de modelos para el conjunto de valores del NYSE y NASDAQ. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción del modelo GARCH(1,1) y varios modelos LMS-GARCH-RV(1,1) que emplean m a diferentes frecuencias. Los mejores resultados de cada serie se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Fun Error	Proxy	Modelos	AAPL	AMZN	BAC	GOOG	JCP	WAG	MSFT	YHOO	GS	IBM	PCLN	MRK
NQLIKE	r^2	GARCH	1.0107	1.1340	1.0363	1.1235	1.2337	0.8976	1.0980	1.0162	1.0241	1.1016	1.0765	1.0957
		LMS-GARCH-RV 30 min.	1.0433	1.1771	0.9806	1.0009	1.0601	1.7617	1.0768	1.0899	1.0042	1.013	1.0176	1.0207
		LMS-GARCH-RV 15 min.	1.0378	1.1754	0.9773	1.0047	1.0636	1.7913	1.0754	1.0825	1.0076	1.0086	1.0090	1.0195
		LMS-GARCH-RV 5 min.	1.0301	1.1763	0.9820	1.0041	1.0899	1.7994	1.0661	1.0456	1.0081	1.0121	1.0106	1.0118
		LMS-GARCH-RV 2 min.	1.0283	1.1676	0.9914	1.0015	1.1166	1.8073	1.0704	1.0399	1.0107	1.0276	1.0167	1.0150
NQLIKE	r^2	GARCH	1.0052	1.3050	1.2443	1.6391	1.5842	0.784	0.8388	0.9906	1.0294	1.2749	1.1307	1.2019
		LMS-GARCH-RV 30 min.	1.0939	1.4089	1.0117	1.0204	1.1731	2.5821	1.1779	1.0772	1.0925	1.0158	1.0578	1.0492
		LMS-GARCH-RV 15 min.	1.1400	1.4095	0.9995	1.0176	1.1875	2.6504	1.1871	1.0872	1.1121	1.0109	1.0414	1.0513
		LMS-GARCH-RV 5 min.	1.1009	1.4140	1.0676	1.0205	1.2547	2.6644	1.1578	1.0159	1.0931	1.0267	1.0591	1.0456
		LMS-GARCH-RV 2 min.	1.0940	1.3840	1.1298	1.0317	1.336	2.6897	1.1510	1.0175	1.1075	1.0806	1.1010	1.0362
NMSE	rv	GARCH	1.0108	1.2367	1.0883	1.5162	2.0983	1.024	1.1802	1.0741	1.0706	1.2038	1.1114	1.2394
		LMS-GARCH-RV 30 min.	1.0166	1.0731	0.9846	1.0041	1.1739	1.0913	1.0757	1.0297	1.0073	1.0185	1.0174	1.0323
		LMS-GARCH-RV 15 min.	1.0123	1.0709	0.9817	1.0063	1.1825	1.0896	1.0742	1.0303	1.0152	1.0142	1.0077	1.0288
		LMS-GARCH-RV 5 min.	1.0112	1.0735	0.9841	1.0064	1.2787	1.1034	1.0618	1.0164	1.0201	1.0169	1.0116	1.0163
		LMS-GARCH-RV 2 min.	1.0114	1.0760	0.9920	1.0057	1.3947	1.0855	1.0729	1.0148	1.0274	1.0337	1.0225	1.0216
NMSE	rv	GARCH	1.0021	1.1060	1.5267	2.4742	2.0745	1.0067	0.7086	1.0976	1.0311	1.3949	1.1310	1.3194
		LMS-GARCH-RV 30 min.	1.0151	1.0406	1.0239	1.0264	1.1952	1.0549	1.0708	1.0226	1.0787	1.0235	1.0440	1.0516
		LMS-GARCH-RV 15 min.	1.0267	1.0398	1.0164	1.0233	1.2072	1.0542	1.0716	1.0311	1.0988	1.018	1.0329	1.0517
		LMS-GARCH-RV 5 min.	1.0179	1.0411	1.1087	1.0264	1.3114	1.0611	1.0604	1.0045	1.0942	1.0275	1.0531	1.0432
		LMS-GARCH-RV 2 min.	1.0175	1.0417	1.2061	1.0349	1.4520	1.0522	1.0653	1.0065	1.1137	1.0713	1.1012	1.035

Fun Error	Proxy	Modelos	AAPL	AMZN	BAC	GOOG	JCP	WAG	MSFT	YHOO	GS	IBM	PCLN	MRK
NQLIKE	r^2	GARCH	1.0107	1.1340	1.0363	1.1235	1.2337	0.8976	1.098	1.0162	1.0241	1.1016	1.0765	1.0957
		RLS-GARCH-RV 30 min.	1.0272	1.1354	1.0050	1.0273	1.0055	1.3388	1.0834	1.0139	1.0247	1.0609	1.0405	1.0677
		RLS-GARCH-RV 15 min.	1.0270	1.1218	1.0097	1.0227	1.0054	1.3462	1.0742	1.0138	1.0252	1.0593	1.0459	1.0663
		RLS-GARCH-RV 5 min.	1.0240	1.1135	1.0191	1.0264	1.0254	1.3708	1.076	1.0092	1.0323	1.0582	1.0574	1.0677
		RLS-GARCH-RV 2 min.	1.0236	1.1062	1.0356	1.0333	1.0581	1.3455	1.0889	1.0090	1.0398	1.0670	1.0816	1.0823
NQLIKE	r^2	GARCH	1.0052	1.3050	1.2443	1.6391	1.5842	0.7840	0.8388	0.9906	1.0294	1.2749	1.1307	1.2019
		RLS-GARCH-RV 30 min.	1.1041	1.3493	1.1318	1.1759	1.0540	1.7418	1.0608	1.0247	1.0847	1.1692	1.2136	1.1280
		RLS-GARCH-RV 15 min.	1.1183	1.3161	1.1646	1.1505	1.0407	1.7597	1.0503	1.0366	1.0891	1.1643	1.2417	1.1245
		RLS-GARCH-RV 5 min.	1.0981	1.2981	1.2269	1.1715	1.0482	1.8082	1.0477	1.0313	1.1276	1.1607	1.2939	1.1306
		RLS-GARCH-RV 2 min.	1.0927	1.2785	1.3236	1.2074	1.1401	1.7625	1.0710	1.0307	1.1716	1.1947	1.3999	1.1803
NMSE	rv	GARCH	1.0108	1.2367	1.0883	1.5162	2.0983	1.0240	1.1802	1.0741	1.0706	1.2038	1.1114	1.2394
		RLS-GARCH-RV 30 min.	1.0314	1.1237	1.0059	1.0658	1.0329	1.0254	1.0976	1.0124	1.0688	1.0900	1.0589	1.1410
		RLS-GARCH-RV 15 min.	1.0319	1.1244	1.0120	1.0574	1.0372	1.0253	1.0828	1.0130	1.0704	1.0866	1.0699	1.1371
		RLS-GARCH-RV 5 min.	1.0298	1.1252	1.0247	1.0633	1.0996	1.0277	1.0858	1.0101	1.0959	1.0840	1.0924	1.1413
		RLS-GARCH-RV 2 min.	1.0318	1.1245	1.0512	1.0738	1.2179	1.0249	1.1065	1.0096	1.1248	1.1006	1.1478	1.1841
NMSE	rv	GARCH	1.0021	1.1060	1.5267	2.4742	2.0745	1.0067	0.7086	1.0976	1.0311	1.3949	1.1310	1.3194
		RLS-GARCH-RV 30 min.	1.0512	1.0560	1.1791	1.1855	1.0347	1.0200	1.0368	1.0196	1.0961	1.1771	1.2226	1.1813
		RLS-GARCH-RV 15 min.	1.0538	1.0560	1.2351	1.1570	1.0409	1.0202	1.0293	1.0302	1.1016	1.1704	1.2649	1.1751
		RLS-GARCH-RV 5 min.	1.0497	1.0563	1.3477	1.1789	1.0928	1.0216	1.0279	1.0277	1.1530	1.1647	1.3397	1.1859
		RLS-GARCH-RV 2 min.	1.0503	1.0558	1.5503	1.2166	1.2250	1.0202	1.0439	1.0269	1.2169	1.2083	1.5197	1.2742

Tabla 22. Comparación de modelos para el conjunto de valores del NYSE y NASDAQ. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción del modelo GARCH(1,1) y varios modelos RLS-GARCH-RV(1,1) que emplean m a diferentes frecuencias. Los mejores resultados de cada serie se resaltan en negra. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.

Apéndice C

Estrategias de estimación GARCH para AMZN, BAC, GOOG e IBM

En el apartado 5.2.1.2 se analiza el comportamiento del modelo GARCH(1,1) cuando se realizan cambios en el procedimiento de estimación de sus parámetros. Para las series AMZN, BAC, GOOG e IBM existen variantes en la estrategia principal que tienen mayor capacidad de predicción. Las modificaciones que aumentan el rendimiento son: distribución t-Student para las innovaciones, ventana deslizante de 3 meses, ventana deslizante de 9 meses, no estimar de nuevo los parámetros y reestimación mensual. Por tanto, algunas de estas modificaciones mejoran el rendimiento por separado para estas series, pero es necesario analizar el comportamiento de las posibles estrategias que surgen como combinación de las anteriores modificaciones.

En las Tablas 23 a 26 se muestran los errores de predicción para las nuevas estrategias. Las estrategias con mejor rendimiento se han obtenido comparado estos errores de predicción con los errores ya calculados de las Tablas 9 y 10. El lector puede consultar la Tabla 1 para conocer las estrategias resultantes para cada una de las series.

Tabla 23. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para la serie AMZN. Para los errores QLIKE y MSE se muestra el error de predicción utilizando la estrategia principal y el porcentaje de mejora o empeoramiento de las distintas estrategias. También se muestra el error de predicción NQLIKE y NMSE de las distintas estrategias. No hay celdas coloreadas porque el nivel de significancia de los test DMW han resultado ser mayores al 10 %. En negrita se muestran las estrategias con mejor rendimiento.

Estrategia de estimación	Proxy	Error	
		QLIKE	NQLIKE
Estrategia principal	r^2	2.1547	1.1340
t-Student/ 3 meses		8.3446	1.0394
t-Student/ 9 meses		4.9401	1.0780
Estrategia principal	r^v	1.3868	1.3050
t-Student/ 3 meses		19.0644	1.0562
t-Student/ 9 meses		9.5757	1.1800
		MSE	NMSE
Estrategia principal	r^2	2.25E-06	1.2367
t-Student/ 3 meses		13.6222	1.0682
t-Student/ 9 meses		11.0440	1.1001
Estrategia principal	r^v	4.46E-06	1.1060
t-Student/ 3 meses		7.1919	1.0264
t-Student/ 9 meses		5.6019	1.0440

Tabla 24. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para la serie BAC. Para los errores QLIKE y MSE se muestra el error de predicción utilizando la estrategia principal y el porcentaje de mejora o empeoramiento de las distintas estrategias. También se muestra el error de predicción NQLIKE y NMSE de las distintas estrategias. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. El color de las celdas es verde si el nivel de significancia es menor del 5% y rojo si es menor del 1%. En negrita se muestran las estrategias con mejor rendimiento.

Estrategia de estimación	Proxy	Error	
		QLIKE	NQLIKE
Estrategia principal	r^2	1.2871	1.0363
t-Student/ 3 meses		1.0118	1.0259
t-Student/ 9 meses		-0.5387	1.0419
t-Student/ actualización mensual		0.1851	1.0344
t-Student/ 3 meses/ act. mensual		1.2618	1.0233
t-Student/ 9 meses/ act. mensual		0.1302	1.0350
3 meses/ actualización mensual		-2.1651	1.0588
9 meses/ actualización mensual		0.1798	1.0345
Estrategia principal	rv	0.3476	1.2443
t-Student/ 3 meses		11.7919	1.0976
t-Student/ 9 meses		-1.4283	1.2621
t-Student/ actualización mensual		-2.1611	1.2712
t-Student/ 3 meses/ act. mensual		2.1099	1.2180
t-Student/ 9 meses/ act. mensual		-2.5442	1.2759
3 meses/ actualización mensual		-12.5197	1.4001
9 meses/ actualización mensual		-1.7151	1.2656
		MSE	QLIKE
Estrategia principal	r^2	5.81E-08	1.0883
t-Student/ 3 meses		4.9946	1.0340
t-Student/ 9 meses		-0.2403	1.0909
t-Student/ actualización mensual		3.0460	1.0552
t-Student/ 3 meses/ act. mensual		3.2070	1.0534
t-Student/ 9 meses/ act. mensual		2.3916	1.0623
3 meses/ actualización mensual		-15.0699	1.2523
9 meses/ actualización mensual		-0.0048	1.0884
Estrategia principal	rv	1.45E-08	1.5267
t-Student/ 3 meses		20.7248	1.2103
t-Student/ 9 meses		-0.0197	1.5270
t-Student/ actualización mensual		4.9805	1.4507
t-Student/ 3 meses/ act. mensual		5.0844	1.4491
t-Student/ 9 meses/ act. mensual		2.6405	1.4864
3 meses/ actualización mensual		-60.1787	2.4454
9 meses/ actualización mensual		-3.5620	1.5811

Tabla 25. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para la serie GOOG. Para los errores QLIKE y MSE se muestra el error de predicción utilizando la estrategia principal y el porcentaje de mejora o empeoramiento de las distintas estrategias. También se muestra el error de predicción NQLIKE y NMSE de las distintas estrategias. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. El color de las celdas es azul si el nivel de significancia es menor del 10%, verde si es menor del 5% y rojo si es menor que 1%. En negrita se muestran las estrategias con mejor rendimiento.

Estrategia de estimación	Proxy	Error	
		QLIKE	NQLIKE
Estrategia principal	r^2	1.5641	1.1235
t-Student/ 3 meses		10.1263	1.0097
t-Student/ 9 meses		7.5413	1.0388
t-Student/ actualización mensual		3.9227	1.0794
t-Student/ 3 meses/ act. mensual		7.3790	1.0406
t-Student/ 9 meses/ act. mensual		7.7888	1.0360
3 meses/ actualización mensual		7.7111	1.0369
9 meses/ actualización mensual		9.0831	1.0214
Estrategia principal	rv	0.5391	1.6391
t-Student/ 3 meses		33.8891	1.0836
t-Student/ 9 meses		32.0078	1.1145
t-Student/ actualización mensual		16.3928	1.3704
t-Student/ 3 meses/ act. mensual		28.6868	1.1689
t-Student/ 9 meses/ act. mensual		32.5346	1.1058
3 meses/ actualización mensual		37.5742	1.0232
9 meses/ actualización mensual		31.8016	1.1178
Estrategia principal	r^2	MSE	NMSE
t-Student/ 3 meses		33.8567	1.0029
t-Student/ 9 meses		27.5824	1.0980
t-Student/ actualización mensual		22.3781	1.1769
t-Student/ 3 meses/ act. mensual		31.5690	1.0375
t-Student/ 9 meses/ act. mensual		27.2056	1.1037
3 meses/ actualización mensual		32.3731	1.0253
9 meses/ actualización mensual		22.2890	1.1782
Estrategia principal	rv	3.66E-08	2.4742
t-Student/ 3 meses		58.5149	1.0264
t-Student/ 9 meses		52.7919	1.1680
t-Student/ actualización mensual		41.2347	1.4540
t-Student/ 3 meses/ act. mensual		55.3231	1.1054
t-Student/ 9 meses/ act. mensual		52.2054	1.1825
3 meses/ actualización mensual		59.1549	1.0106
9 meses/ actualización mensual		39.4897	1.4972

Tabla 26. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para la serie IBM. Para los errores QLIKE y MSE se muestra el error de predicción utilizando la estrategia principal y el porcentaje de mejora o empeoramiento de las distintas estrategias. También se muestra el error de predicción NQLIKE y NMSE de las distintas estrategias. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. El color de las celdas es verde si el nivel de significancia es menor del 5% y rojo si es menor del 1%. En negrita se muestran las estrategias con mejor rendimiento.

Estrategia de estimación	Proxy	Error	
		QLIKE	NQLIKE
Estrategia principal	r^2	1.6889	1.1016
t-Student/ 3 meses		-0.8158	1.1106
t-Student/ 9 meses		7.7572	1.0162
t-Student/ no actualiza		1.0084	1.0905
t-Student/ 3 meses/ no actualiza		3.3717	1.0645
t-Student/ 9 meses/ no actualiza		1.0084	1.0905
3 meses/ no actualiza		6.7281	1.0275
9 meses/ no actualiza		8.7450	1.0053
Estrategia principal	rv	0.4378	1.2749
t-Student/ 3 meses		3.6194	1.2288
t-Student/ 9 meses		21.2642	1.0038
t-Student/ no actualiza		0.5407	1.2680
t-Student/ 3 meses/ no actualiza		5.2838	1.2075
t-Student/ 9 meses/ no actualiza		0.5407	1.2680
3 meses/ no actualiza		2.2848	1.2458
9 meses/ no actualiza		23.3575	0.9771
		MSE	NMSE
Estrategia principal	r^2	1.6E-08	1.2038
t-Student/ 3 meses		12.8031	1.0496
t-Student/ 9 meses		15.5182	1.0170
t-Student/ no actualiza		4.4724	1.1499
t-Student/ 3 meses/ no actualiza		14.7190	1.0266
t-Student/ 9 meses/ no actualiza		4.4724	1.1499
3 meses/ no actualiza		15.7417	1.0143
9 meses/ no actualiza		16.7957	1.0016
Estrategia principal	rv	6.27E-09	1.3949
t-Student/ 3 meses		22.4041	1.0824
t-Student/ 9 meses		27.3565	1.0133
t-Student/ no actualiza		6.2790	1.3074
t-Student/ 3 meses/ no actualiza		23.9092	1.0614
t-Student/ 9 meses/ no actualiza		6.2790	1.3074
3 meses/ no actualiza		22.1726	1.0857
9 meses/ no actualiza		30.0569	0.9757

Apéndice D

Presupuesto

Se presenta el presupuesto detallado para la realización de este trabajo, calculando los costes de los recursos materiales y humanos que se han utilizado.

En la Tabla 27 se muestran las tareas del proyecto y el tiempo aproximado que ha sido necesario para acometer cada una de ellas.

Tabla 27. Tareas del proyecto.

Tarea	Duración (horas)
Documentación y aprendizaje de conceptos econométricos.	520
Tratamiento de las series.	640
Desarrollo del sistema de adquisición de series.	60
Desarrollo de los experimentos en Matlab.	1.110
Redacción de la memoria.	550
Total	2.880

En total se han dedicado 2.880 horas, de las cuales, aproximadamente se han compartido 24 horas con alguno de los tutores. El coste por hora del ingeniero junior es de 18 € y el del ingeniero senior 35 €.

Tabla 28. Costes de personal.

Concepto	Coste/hora (€/hora)	Tiempo (horas)	Coste (€)
Ingeniero junior	18	2.880	51.840
Ingeniero senior	35	24	840
Total			52.680

Los costes del material se recogen en la Tabla 29. Se deben considerar los imputables al sistema de adquisición de datos y aquellos derivados del tratamiento de las series y programación de las

diferentes aplicaciones o scripts utilizados. Para lo que se ha necesitado un ordenador, Matlab y el Financial Toolbox.

Tabla 29. Costes de material.

Concepto	Coste total (€)
Amortización de un ordenador ASUS S56CB-XX340H	232,5
Servidor gama baja en DigitalOcean	90
Licencia de Matlab	500
Licencia del Financial Toolbox	200
Total	1.022,5

La amortización del ordenador se ha calculado a partir de la siguiente formula:

$$\text{Cuota anual} = \frac{\text{Coste del equipo}}{\text{Vida útil}}$$

se ha considerado una vida útil del equipo de 60 meses (5 años) y una utilización de 18 meses. El servidor se ha contratado en la plataforma de *cloud computing* DigitalOcean, cuesta 5€ al mes y se ha utilizado durante 18 meses. El coste de las licencias de Matlab y el Financial Toolbox se corresponden con las de uso académico.

A partir de los datos anteriores, el presupuesto total se resume en la tabla siguiente:

Tabla 30. Presupuesto.

Concepto	Coste total (€)
Costes de personal	52.680
Costes de material	1.022,5
Base imponible	53.702,5
I.V.A. (21%)	200
Total	64.980,03

El presupuesto total del proyecto asciende a la cantidad de 64.980,03 €.

Lista de figuras

Figura 2.1. Diferentes formas de capitalización de los rendimientos de un activo.....	33
Figura 2.2. Rendimientos diarios del índice S&P 500 desde enero de 1950 hasta mayo de 2014.....	36
Figura 2.3. Distribución Normal (trazo continuo azul) y t-Student con 5 grados de libertad (trazo discontinuo rojo). Ambas tienen $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 5/3$	37
Figura 2.4. Estimaciones de las volatilidades del futuro del IBEX 35 PLUS. Enero 2000 – diciembre 2004.....	39
Figura 3.1. Diagrama de flujo del procedimiento de predicción.....	43
Figura 4.1. <i>News Impact curves</i> de las innovaciones para los modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) y AGARCH(1,1) (izq.) y para los modelos AGARCH(1,1) y TGARCH(1,1).....	53
Figura 4.2. Esquema del problema de filtrado adaptativo. Fuente: CMSIS-DSP Software Library.	55
Figura 5.1. Cotización, volatilidad realizada y predicción de la volatilidad GARCH(1,1) para 1 día en adelante del IBEX 35 PLUS.	68
Figura 5.2. Comparación del modelo LMS-GARCH-R2 y RLS-GARCH-RV para (a) IBEX 35 y (b) EURO STOXX. Se muestran el número de trimestres en los que cada modelo vence para cada dupla <i>error-proxy</i>	74
Figura 5.3. Comparación de modelos para la serie BBVA: (a) GARCH y RLS-GARCH-RV, (b) GARCH y LMS-GARCH-R2 y (c) LMS-GARCH-R2 y RLS-GARCH-RV. Se muestran el número de trimestres en los que cada modelo vence para cada dupla <i>error-proxy</i>	75
Figura 5.4. Comparación del modelo LMS-GARCH-RV con el resto de modelos para la serie BBVA. Se consideran los errores y <i>proxies</i> : (a) QLIKE-r2, (b) QLIKE-rv, (c) MSE-r2 y (d) MSE-rv.....	77
Figura 5.5. Comparación del modelo LMS-GARCH-RV con el resto de modelos para el conjunto de series americanas. Se consideran los errores y <i>proxies</i> : (a) QLIKE-r2, (b) QLIKE-rv, (c) MSE-r2 y (d) MSE-rv.....	79
Figura 5.6. Comparación del modelo RLS-GARCH-RV para diferentes <i>rv</i> de la serie BBVA. Se muestran los trimestres ganadores respecto al modelo GARCH para los diferentes errores y <i>proxies</i>	82

Lista de tablas

Tabla 1. Modificaciones de la estrategia principal de las series AMZN, BAC, GOOG, GS, IBM, JCP, MRK y MSFT. Aumentos de rendimiento del error QLIKE respecto a la estrategia principal. El <i>proxy</i> utilizado es la volatilidad realizada. Entre paréntesis se muestra el resultado de los test DMW.....	69
Tabla 2. Parámetros optimizados de los filtros adaptativos que utilizan los modelos LMS-GARCH y RLS-GARCH.....	73
Tabla 3. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para el futuro del índice IBEX 35 PLUS. La tabla muestra para cada función de error y <i>proxy</i> el error de predicción utilizando la estrategia principal, y el porcentaje de mejora o empeoramiento para el resto de estrategias. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses, 9 meses y 21 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.....	88
Tabla 4. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para el futuro del índice IBEX 35 PLUS. La tabla muestra para cada función de error y <i>proxy</i> el error de predicción de cada modelo. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses, 9 meses y 21 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.....	89
Tabla 5. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para el futuro del índice DJ EURO STOXX 50. La tabla muestra para cada función de error y <i>proxy</i> el error de predicción utilizando la estrategia principal, y el porcentaje de mejora o empeoramiento para el resto de estrategias. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses, 9 meses y 21 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual	

capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.90

Tabla 6. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para el futuro del índice DJ EURO STOXX 50. La tabla muestra para cada función de error y *proxy* el error de predicción de cada modelo. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses, 9 meses y 21 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.91

Tabla 7. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para la serie BBVA. La tabla muestra para cada función de error y *proxy* el error de predicción utilizando la estrategia principal, y el porcentaje de mejora o empeoramiento para el resto de estrategias. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses y 9 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.92

Tabla 8. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para la serie BBVA. La tabla muestra para cada función de error y *proxy* el error de predicción de cada modelo. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses y 9 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.93

Tabla 9. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para los valores del NYSE y NASDAQ. La tabla muestra para cada función de error y *proxy* el error de predicción utilizando la estrategia principal, y el porcentaje de mejora o empeoramiento para el resto de estrategias. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses y 9 meses, sin reestimación de parámetros, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el

modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%. 94

Tabla 10. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para el conjunto de valores del NYSE y NASDAQ. La tabla muestra para cada función de error y *proxy* el error de predicción de cada modelo. Las modificaciones respecto a la estrategia principal son: residuos con distribución t-Student, ventana deslizante de entrenamiento de 3 meses y 9 meses, no reestimar los parámetros del modelo, reestimación diaria y reestimación mensual. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%. 94

Tabla 11. Comparación de modelos para el futuro del índice IBEX 35 PLUS. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos GARCH, HIS a 60 días y RiskMetrics. Los mejores resultados de cada trimestre se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%. 96

Tabla 12. Comparación de modelos para el futuro del índice DJ EURO STOXX 50. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos GARCH, HIS a 60 días y RiskMetrics. Los mejores resultados de cada trimestre se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%. 97

Tabla 13. Comparación de modelos para la serie BBVA. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos GARCH, HIS a 60 días y RiskMetrics. Los mejores resultados de cada trimestre se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%. 98

Tabla 14. Comparación de modelos para el conjunto de valores del NYSE y NASDAQ. La tabla muestra para cada función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos GARCH, HIS a 60 días y RiskMetrics. Los mejores resultados de cada serie se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual

capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%.99

Tabla 15. Comparación de modelos para el futuro del índice IBEX 35 PLUS. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos: GARCH(1,1), LMS-GARCH-R2(1,1), LMS-GARCH-RV(1,1), RLS-GARCH-R2(1,1) y RLS-GARCH-RV(1,1). Los mejores resultados de cada trimestre se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%. 102

Tabla 16. Comparación de modelos para el futuro del índice DJ EURO STOXX 50. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos GARCH(1,1), LMS-GARCH-R2(1,1), LMS-GARCH-RV(1,1), RLS-GARCH-R2(1,1) y RLS-GARCH-RV(1,1). Los mejores resultados de cada trimestre se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%. 103

Tabla 17. Comparación de modelos para la serie BBVA. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos GARCH(1,1), LMS-GARCH-R2(1,1), LMS-GARCH-RV(1,1), RLS-GARCH-R2(1,1) y RLS-GARCH-RV(1,1). Los mejores resultados de cada trimestre se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%. 104

Tabla 18. Comparación de modelos para el conjunto de valores del NYSE y NASDAQ. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción de los modelos GARCH(1,1), LMS-GARCH-R2(1,1), LMS-GARCH-RV(1,1), RLS-GARCH-R2(1,1) y RLS-GARCH-RV(1,1). Los mejores resultados de cada serie se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%. 105

Tabla 19. Comparación de modelos para la serie BBVA. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción del modelo GARCH(1,1) y varios modelos LMS-GARCH-RV(1,1) que emplean *m* a diferentes frecuencias. Los mejores resultados de cada serie se

resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%..... 106

Tabla 20. Comparación de modelos para la serie BBVA. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción del modelo GARCH(1,1) y varios modelos RLS-GARCH-RV(1,1) que emplean *rv* a diferentes frecuencias. Los mejores resultados de cada serie se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son verdes si el nivel de significancia es menor del 5%..... 107

Tabla 21. Comparación de modelos para el conjunto de valores del NYSE y NASDAQ. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción del modelo GARCH(1,1) y varios modelos LMS-GARCH-RV(1,1) que emplean *rv* a diferentes frecuencias. Los mejores resultados de cada serie se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%..... 108

Tabla 22. Comparación de modelos para el conjunto de valores del NYSE y NASDAQ. La tabla muestra para cada combinación de función de error y *proxy* el error de predicción del modelo GARCH(1,1) y varios modelos RLS-GARCH-RV(1,1) que emplean *rv* a diferentes frecuencias. Los mejores resultados de cada serie se resaltan en negrita. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo GARCH(1,1). Las celdas son azules si el nivel de significancia es menor del 10%, verdes si es menor del 5% y rojas si es menor del 1%..... 109

Tabla 23. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para la serie AMZN. Para los errores QLIKE y MSE se muestra el error de predicción utilizando la estrategia principal y el porcentaje de mejora o empeoramiento de las distintas estrategias. También se muestra el error de predicción NQLIKE y NMSE de las distintas estrategias. No hay celdas coloreadas porque el nivel de significancia de los test DMW han resultado ser mayores al 10 %. En negrita se muestran las estrategias con mejor rendimiento. 112

Tabla 24. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para la serie BAC. Para los errores QLIKE y MSE se muestra el error de predicción utilizando la estrategia principal y el porcentaje de mejora o empeoramiento de las distintas estrategias. También se muestra el error

de predicción NQLIKE y NMSE de las distintas estrategias. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. El color de las celdas es verde si el nivel de significancia es menor del 5% y rojo si es menor del 1%. En negrita se muestran las estrategias con mejor rendimiento. 113

Tabla 25. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para la serie GOOG. Para los errores QLIKE y MSE se muestra el error de predicción utilizando la estrategia principal y el porcentaje de mejora o empeoramiento de las distintas estrategias. También se muestra el error de predicción NQLIKE y NMSE de las distintas estrategias. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. El color de las celdas es azul si el nivel de significancia es menor del 10%, verde si es menor del 5% y rojo si es menor que 1%. En negrita se muestran las estrategias con mejor rendimiento. 114

Tabla 26. Comparación de estrategias de estimación de modelos GARCH(1,1) para la serie IBM. Para los errores QLIKE y MSE se muestra el error de predicción utilizando la estrategia principal y el porcentaje de mejora o empeoramiento de las distintas estrategias. También se muestra el error de predicción NQLIKE y NMSE de las distintas estrategias. El color de las celdas indica el nivel de significancia del test DMW, la hipótesis nula es un modelo de igual capacidad de predicción que el modelo de la estrategia principal. El color de las celdas es verde si el nivel de significancia es menor del 5% y rojo si es menor del 1%. En negrita se muestran las estrategias con mejor rendimiento. 115

Tabla 27. Tareas del proyecto..... 117

Tabla 28. Costes de personal 117

Tabla 29. Costes de material 118

Tabla 30. Presupuesto 118

Bibliografía

- Andersen, T. G., & Bollerslev, T. (1998). Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts. *International Economic Review* 39, 885-905.
- Bedendo, M., & Colla, P. (2013). Sovereign and corporate credit risk: Spillover effects in the Eurozone. CEPR Working Paper, 2013. *Disponible en* <http://www.siecon.org>.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Bollerslev, T. (2008). Glossary to ARCH (GARCH). *CREATES Research Paper* 2008-49.
- Bollerslev, T., & Ghysels, E. (1994). Periodic Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Business and Economic Statistics*, 14(2), 139-151.
- Box, G. E., & Jenkins, G. M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden-Day, San Francisco.
- Brownlees, C., Engle, R. F., & Kelly, B. (2009). A Practical Guide to Volatility Forecasting through Calm and Storm. *Disponible en SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1502915>*.
- Brownless, C., Engle, R. F., & Kelly, B. (2009). A Practical Guide to Volatility Forecasting through Calm and Storm. *Disponible en SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1502915>*.
- Carnero, M. A., Peña, D., & Ruiz, E. (2004). Persistence and Kurtosis in GARCH and Stochastic Volatility Models. *Journal of Financial Econometrics*, 2, 319-342.
- Chou, R. Y. (1988). Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using GARCH. *Journal of Applied Econometrics*, 3, 279-294.
- De Vilder, R., & Visser, M. P. (2007). *Proxies for daily volatility*. PSE Working Papers n2007-11.
- Diebold, F. X., & Mariano, R. S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics*, 13(3), 253-263.
- Ding, Z., Granger, C. W., & Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1, 83-106.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), 987-1008.

- Engle, R. F., & Ng, V. K. (1993). Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. *The Journal of Finance*, 48(5), 1749-1778.
- Engle, R. F., & Patton, A. J. (2001). What Good is a Volatility Model? *Quantitative finance*, 1 (2), 237-245.
- Figlewski, S. (1997). Forecasting Volatility in Financial Markets, Institutions & Instruments. *New York University, Salomon Center*, 6(2).
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On The Relation between The Expected Value and The Volatility of Nominal Excess Return on stocks. *Journal of Finance*, 48, 1779-1801.
- Hansen, P., & Lunde, A. (2005a). Realized Variance and Market Microstructure Noise. *Disponible en SSRN*: <http://ssrn.com/abstract=506542>.
- Hansen, P. R., & Lunde, A. (2005b). A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)? *Journal of Applied Econometrics*, 20(7), 873-889.
- Hansen, P. R., & Lunde, A. (2006). Consistent ranking of volatility models. *Journal of Econometrics*, 131 (1-2), 97-121.
- Haykin, S. (2013). *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall.
- Kim, S., Shephard, N., & Chib, S. (1998). Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models. *Review of Economics Studies*, 65, 361-393.
- Lázaro Gredilla, M., Ortega Moral, M., Navarro Abellán, J. J., & Figueiras Vidal, A. R. (2006). Preliminary Experiments with On-line Adaptive GARCH Models. Learning'06 International Conference, Barcelona, Spain, 2006.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Merton, R. C. (1980). On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation. *Journal of Financial Economics*, 8, 323-361.
- Nelsson, D. D. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, 59(2), 347-370.
- Patton, A. J. (2009). Volatility forecast comparison using imperfect volatility. *Technical report, University of Oxford*.
- Patton, A. J., & Sheppard, K. (2009). Evaluating volatility and correlation forecasts. In: Andersen, T.G., Davis, R.A., Kreiss, J.-P., Mikosch, T. (Eds.), *The Handbook of Financial Time Series*. Springer Verlag.
- Peña, D. (2005). *Análisis de Series Temporales*. Alianza Editorial.

BIBLIOGRAFÍA

- Poon, S.-H. (2005). *A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility*. John Wiley & Sons, Ltd.
- Rabemananjara, R., & Zakoian, J. M. (1993). Threshold ARCH Models and Asymmetries in Volatility. *Journal of Applied Econometrics* 8(1), 31-49.
- RiskMetrics. (1996). *RiskMetrics Technical Document*. New York: J.P. Morgan/Reuters.
- Ross, S. A. (1989). Information and Volatility: The No-Arbitrage Martingale Approach to Timing and Resolution Irrelevancy. *Journal of Finance*, 44, 1-17.
- Sayed, A. H. (2003). *Fundamentals of Adaptive Filtering*. Wiley, New York, NY.
- Slutsky, E. (1927). The summation of random causes as the source of cyclical processes. *Problems of Economic Conditions*, ed. The Conjunction Institute. Moscow, 3(1).
- Taylor, S. J. (1982). Financial Returns Modelled by the Product of Two Stochastic 1961-79. In Anderson, O.D. (Ed.): *Time Series Analysis: Theory and Practice*, 203-226. Amsterdam, North Holland.
- Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- West, K. D. (1996). Asymptotic Inference About Predictive Ability. *Econometrica*, 64, 1067-1084.
- Whittle, P. (1951). *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*. Almqvist and Wicksell.
- Widrow, B., & Hoff, M. E. (1960). Adaptive Switching Circuits. *IRE WESCON Convention Record*, 4, 96-104.
- Yule, G. (1926). Why do we sometimes get nonsense correlations between time series? *Journal of the Royal Statistical Society*, 89(1), 1-64.
- Yule, G. (1927). On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with special reference to Wolfer's Sunspot Numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A*, 226, 267-298.